



Esercitazione 12: Generatore di sequenze pseudorandom e di rumore bianco

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

Issue: 1

Date: September 11, 2020

University of Trento
Department of Physics
Via Sommarive 14, 38123
Povo (TN), Italy

Introduzione

L'obiettivo di questa esperienza è quello di studiare i generatori di sequenze pseudorandom e la loro applicazione come generatori di rumore. In particolare si andrà a realizzare un generatore pseudorandom a 4, 6 e 10 bit, variando di volta in volta il tapping con la porta logica XOR in diversi registri. Successivamente con l'utilizzo di un convertitore digitale-analogico si andrà a realizzare un generatore di rumore (quasi) bianco. Infine per mezzo di un filtro si andrà a misurare la Power Spectral Density (PSD) del generatore di rumore bianco.

1 Setup

1.1 Materiali

- Generatore di funzione d'onda *Rigol DG1022* (impedenza nominale in uscita $R_s = 50 \Omega$);
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi coassiali BNC-banana e BNC-BNC;
- resistori e capacitori vari;
- 2 integrati 74xx175 (4 × D-type FF), 1 integrato 74xx74 (2 × D-type FF);
- 1 integrato 74xx86, 1 integrato convertitore digitale-analogico DAC0800;
- 2 Op-Amp OP07, 1 display numerico.

1.2 Procedure di misura

Gli Op-Amp vengono alimentati da una tensione di ± 12 V ai rispettivi pin e la corrente in ciascun ramo viene limitata a 40 mA. Gli altri integrati più il display invece vengono alimentati con una tensione di + 5 V e la corrente viene limitata a 120 mA.

Di seguito vengono riportati i diagrammi circuitali dei vari circuiti, nell'analisi verranno analizzati più in dettaglio.

Nella prima parte dell'esperienza viene assemblato un generatore pseudo random a 4-bit (riportato in figura 1), poi verranno aggiunti altri registri per arrivare prima a 6-bit, infine a 10-bit.

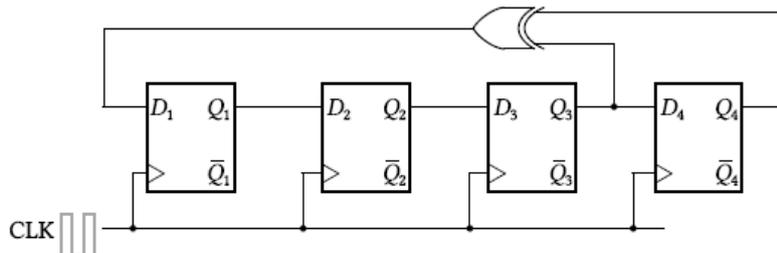


Figure 1: Generatore pseudorandom a 4-bit.

Come flip-flop vengono utilizzati gli integrati 74xx175 e 74xx74. Nella seconda parte dell'esperienza, sfruttando il generatore pseudorandom a 10-bit e con l'ausilio di un convertitore digitale-analogico DAC0800 e di un Op-Amp OP07, è stato costruito un generatore di rumore (quasi) bianco. Si sono collegate 8 delle 10 uscite dei registri agli 8 pin del DAC0800. In figura è presente il relativo cablaggio.

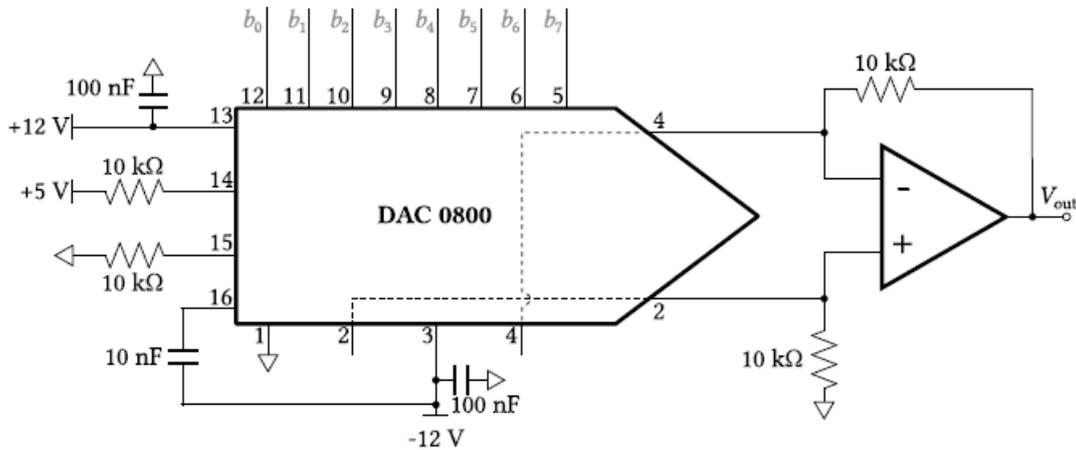


Figure 2: Generatore di rumore (quasi) bianco.

Infine per la misura della Power Spectral Density (PSD), dopo aver collegato 7 degli 8 pin del DAC0800 a terra e solo uno ad un registro del generatore pseudorandom 10-bit, all'uscita del circuito precedente viene aggiunto un filtro passa basso realizzato con un Op-Amp OP07 nella configurazione in figura (3).

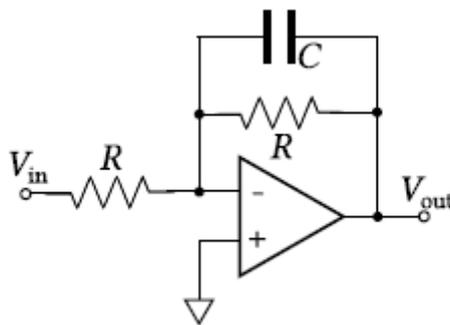


Figure 3: Filtro passa basso.

2 Descrizione e discussione dei risultati

Non viene riportata una sezione per la conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

2.1 Generatore pseudo random a 4-bit

Il circuito riportato in figura (1) rappresenta un'implementazione di un generatore pseudorandom a 4-bit, utilizzando i flip-flop. Nella configurazione in figura è stato eseguito un *tapping* con una porta XOR tra il terzo e quarto registro. Una veloce analisi osservando

una tabella di verità ci indica una possibile sequenza in uscita, e ci dice quante combinazioni random sono prodotte prima di ricominciare il *loop*. Di seguito riportiamo quindi la tabella di verità per registro 4-bit, con *tapping* tra 3° e 4° registro e sequenza dopo ogni *clock* (supponiamo di avere tutte le uscite *low*, a parte Q_4 che è *high*, in modo che la XOR produca *high* anche in D_1).

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Come si nota, l'ultima sequenza coincide con la prima, dunque il ciclo si continuerà a ripetere. Come si osserva dai primi quattro elementi della tabella, non importa in quale registro venga dato il segnale iniziale, infatti il ciclo si ripeterà sempre ugualmente, l'unica cosa che cambia è la sequenza iniziale con cui parte il ciclo. Dunque con questo registro e questo *tapping* si riescono a creare sequenze di 15 numeri random ($2^4 - 1$). Nella tabella manca la sequenza 0000, questo dovuto al fatto che in questa configurazione il generatore manterrà sempre questo stato, perdendo così di interesse e di utilità.

Modificando ora il *tapping* tra il 2° e 4° registro, osserviamo la sequenza in uscita mediante una delle possibili tabelle di verità (partiamo con la stessa configurazione precedente).

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Anche in questo caso la prima e l'ultima sequenza sono uguali e poi il ciclo ricomincia. Per lo stesso motivo spiegato sopra, anche in questo caso non importa dove venga dato il segnale *high* iniziale, purché non si parta con tutti i registri *low*, altrimenti si degenera solo su quello stato. In questo caso si contano sequenze di 6 numeri binari. Infine utilizzando un *tapping* tra il 1° e il 4° registro, con una tabella di verità e sempre nella medesima configurazione iniziale, notiamo che le sequenze in uscita sono composte da 15 numeri, come nel caso in cui il *tapping* era tra il 3° e il 4° registro. Tutte le considerazioni fatte per quella configurazione, valgono anche per questa.

2.2 Generatore pseudo random a 6-bit e 10-bit

Con un generatore pseudorandom a 6-bit c'è la possibilità di ottenere sequenze che comprendono un insieme di $2^6 - 1$ numeri. L'implementazione di questo circuito è praticamente uguale a quella precedente, se non per il fatto che ora si utilizzano 6 registri. La porta XOR è posta tra il 5° e il 6° registro. Poiché per un elevato numero di bit scrivere le tabelle di verità risulta molto più lungo, per contare le sequenze di numeri in uscita, abbiamo collegato l'uscita di un registro all'oscilloscopio e abbiamo osservato il segnale prodotto. Si è visto chiaramente che le forme d'onda all'uscita erano casuali, ma venivano ripetute uguali tra loro tutte le volte che la sequenza iniziava. Questo pattern che si ripete rappresenta la sequenza che ci interessa, dunque quello che abbiamo fatto è stato di misurare il periodo di questa particolare forma d'onda e poi dividere per la frequenza di singolo *clock*, questo per trovare di quanti numeri era composta la sequenza. Per capire meglio, abbiamo riportato un'immagine (4) di quel che intendiamo.

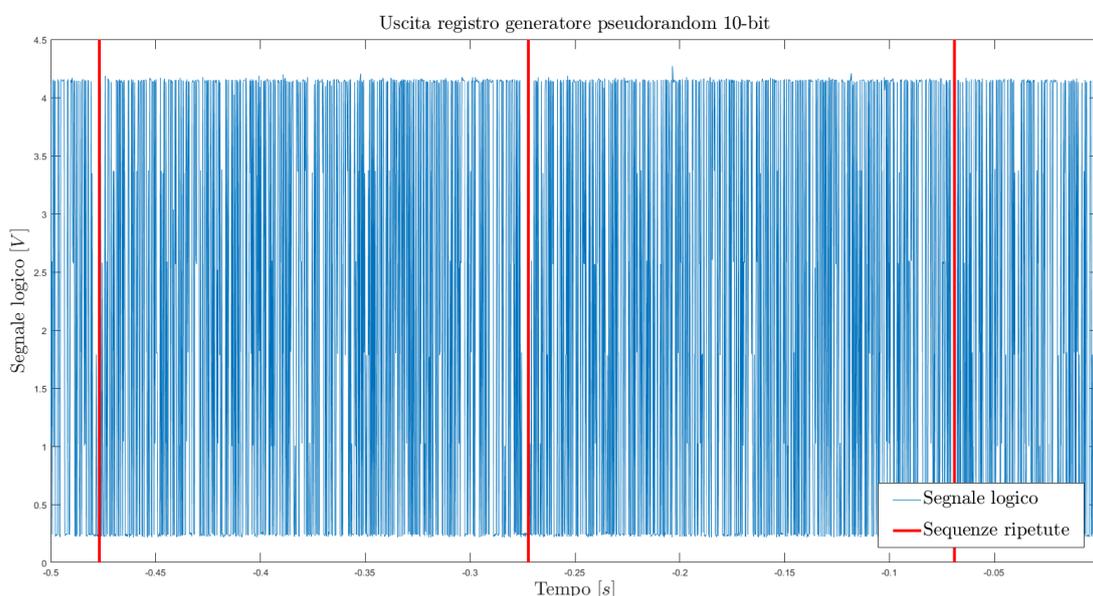


Figure 4: Uscita di uno dei registri del generatore pseudorandom a 10-bit. Sull'immagine si capisce cosa si intende dire quando si parla di sequenze (*pattern*) ripetute. Frequenza di *clock* a $5kHz$.

Nella configurazione di *tapping* al 5° e 6° registro abbiamo contato sequenze di 63 numeri, mentre per *tapping* al 4° e 6° registro sequenze di 14, infine per *tapping* al 3° e 6° registro sequenze di 9. Quindi il *tapping* con la porta XOR tra 5° e il 6° registro è quello che registra la sequenza maggiore di numeri, tra le combinazioni provate.

La stessa cosa è stata fatta con un generatore pseudorandom a 10-bit, utilizzando cioè 10 registri. Questa volta si ha una grande varietà di numeri ($2^{10} - 1$), il che rende impraticabile il conteggio senza l'uso dell'oscilloscopio come fatto nella parte precedente. Questa volta abbiamo usato un *tapping* al 7° e 10° registro, ed abbiamo contato sequenze di 1023 numeri. La sequenza registrata è detta *pseudo-random bit sequence (PRBS)*.

2.3 Generatore di rumore (quasi) bianco

Per la realizzazione di un tale dispositivo, ci siamo serviti di un convertitore digitale analogico implementato dall'integrato DAC0800 (Fig.2). Per un simile circuito il costruttore

prevede un'uscita V_{out} data da

$$V_{out} = V_{ref} \frac{2n - 255}{256} \quad (1)$$

dove V_{ref} è la tensione al pin 14 del DAC0800 e nel nostro caso equivale a $5V$, ed n è il *digital code*, tipicamente va da 0 a $2^N - 1$. Nella realizzazione del circuito sono stati collegati 8 pin dei 10 del generatore pseudorandom al convertitore, come è riportato nel circuito nella sezione di procedure. Sotto è riportata un'immagine dell'oscilloscopio dell'uscita V_{out} . A posteriori abbiamo calcolato la media e la deviazione standard dei dati. La media risulta $-0.024 \pm 0.03V$ e la deviazione $2.86 \pm 0.05V$.

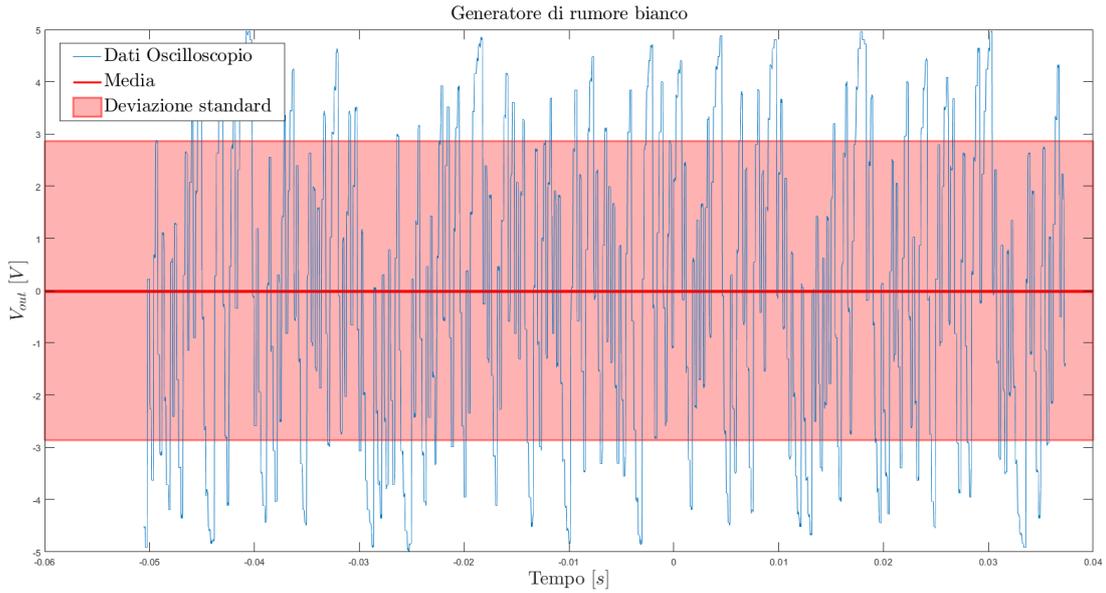


Figure 5: Generatore di rumore bianco 8-bit. Nel grafico è rappresentata sia la media che la deviazione standard.

I valori ottenuti possono essere commentati partendo dalla relazione (1). Infatti partiamo dalla definizione di deviazione standard:

$$\sigma_V^2 = \langle (V_i - \langle V_{out} \rangle)^2 \rangle \quad (2)$$

dove V_i sono i dati sperimentali e le parentesi angolari si riferiscono alla media. Usando la relazione sopra (1), possiamo riscrivere la deviazione standard come:

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{N} \sum_n \left(V_{ref} \frac{2n - 255}{256} - \langle V_{out} \rangle \right)^2 \quad (3)$$

dove N è il numero di campioni V_i . Si sta considerando convertitore a 8-bit, dunque $n \in [0, 255]$ naturali. Per procedere con i calcoli, assumiamo che la distribuzione degli n sia uniforme, quindi la media $\langle V_{out} \rangle = 0$ (dato appurato anche osservando la media sperimentale compatibile con zero), e poi approssimiamo la sommatoria ad un integrale.

$$\sigma_V^2 \approx \frac{1}{256} \sum_{n=0}^{255} \left(V_{ref} \frac{2n - 255}{256} \right)^2 \approx \frac{1}{256} V_{ref}^2 \int_0^{255} \left(\frac{2n - 255}{256} \right)^2 dn \quad (4)$$

Approssimiamo $256 \rightarrow 255$, quindi risulta:

$$\sigma_V^2 \approx \frac{1}{255^3} V_{ref}^2 \int_0^{255} (2n - 255)^2 dn \approx \frac{1}{3} V_{ref}^2 \quad (5)$$

Questa approssimazione è compatibile con il valore trovato sperimentalmente, infatti avendo usato $V_{ref} = 5V$, otteniamo $\sigma_V \approx 2.887V$.

Dopo aver collegato 7 pin del DAC0800 a terra e solo 1 al generatore pseudorandom 10-bit, abbiamo eseguito una analisi simile alla precedente. Questa volta l'immagine all'oscilloscopio si presenta come in figura (7).

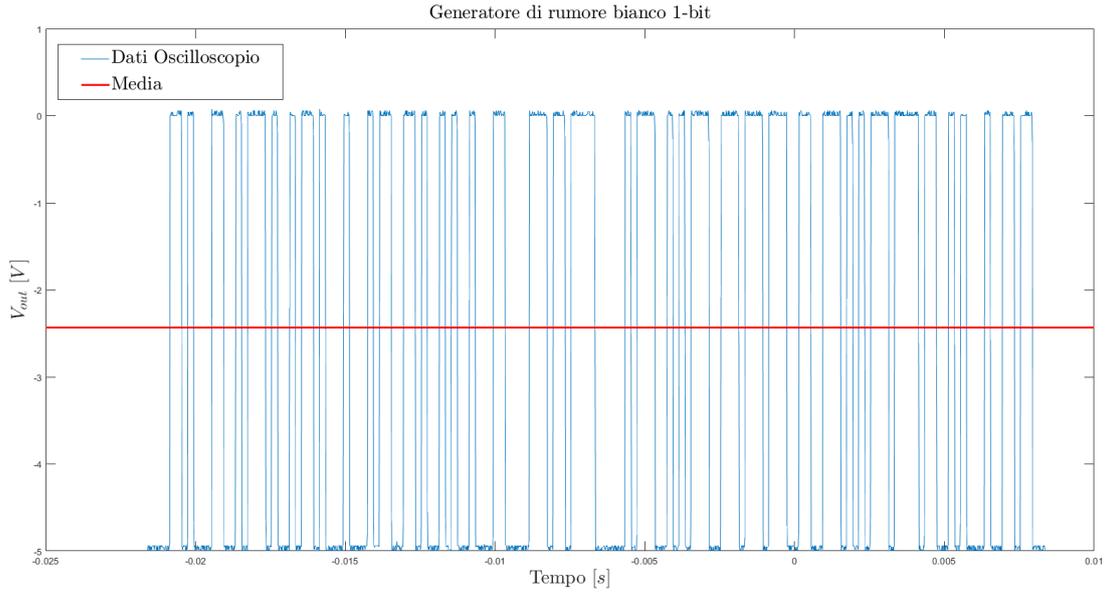


Figure 6: Generatore di rumore bianco 1-bit. Nel grafico è rappresentata la media.

In questo caso la media vale -2.43 ± 0.03 e la deviazione standard vale 2.47 ± 0.05 . Per l'analisi teorica qui bisogna partire dalla relazione (1) e considerare che ora il generatore è da 1-bit. In particolare n può essere 0 o 128, dunque per la relazione (1), si può dire che V_i può essere o $-V_{ref}$ oppure $0V$. Assumendo ancora una volta che la distribuzione dei V_i sia uniforme, possiamo considerare $\langle V_{out} \rangle = -V_{ref}/2$ (come trovato sperimentalmente), dunque si ottiene che:

$$\sigma_V \approx \frac{V_{ref}}{2} \quad (6)$$

ed anche in questa situazione possiamo affermare una compatibilità dei dati sperimentali con il modello.

2.4 Misura della *Power Spectral Density* (PSD) del generatore di rumore bianco

Una volta montato il circuito in figura (3), che rappresenta un filtro, vengono misurate le deviazioni standard del segnale in uscita per 12 configurazioni differenti, in particolare cambiando la capacità. Il filtro rappresentato è un filtro passa basso del primo ordine ed ha una frequenza di taglio data da $f_{3dB} = 1/(2\pi RC)$. Successivamente abbiamo graficato la varianza (quadrato della deviazione standard), in funzione della *ENBW* (*equivalent noise bandwidth*), data da $\pi/2f_{3dB}$, nel grafico sottostante.

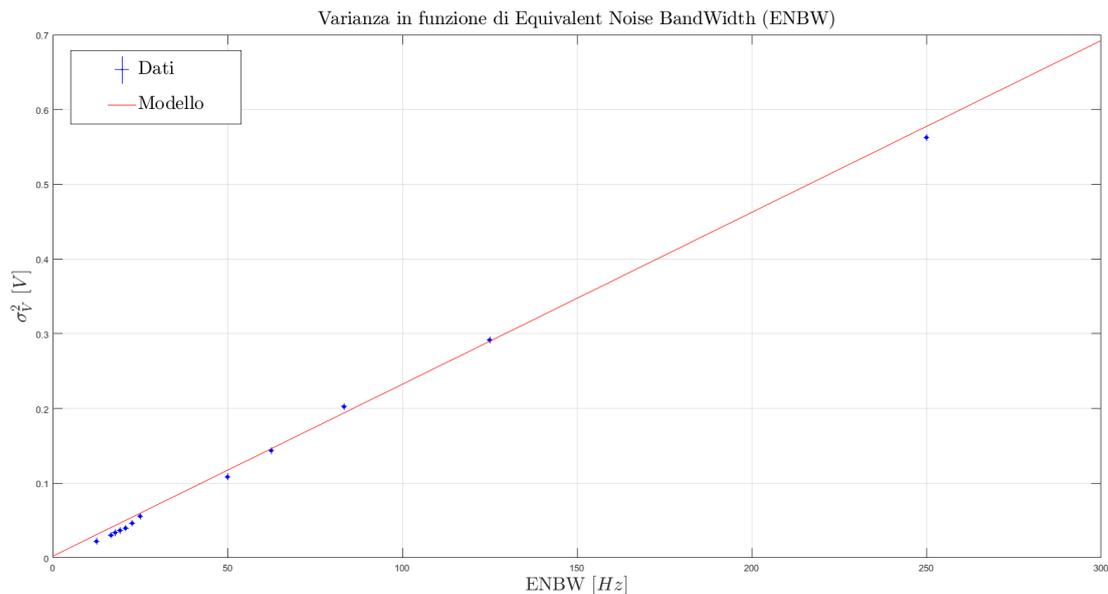


Figure 7: Varianza in funzione di Equivalent Noise BandWidth (ENBW), con regressione lineare

Nello stesso grafico è riportata anche la regressione lineare dei dati. Infatti, valendo la relazione: $\sigma_v^2 = PSD \cdot ENBW$, abbiamo ottenuto dalla regressione il valore sperimentale della PSD. Dopo aver osservato nel grafico un leggero offset dei dati, abbiamo deciso per completezza di eseguire un fit lineare a due parametri (coefficiente angolare e intercetta). I dati ottenuti dalla regressione sono i seguenti $PSD_s = (23.0 \pm 0.2) \times 10^{-4} V^2s$, mentre l'intercetta vale $(-4.1 \pm 2.1) \times 10^{-3} V^2$. La previsione teorica della PSD prevede la seguente relazione $PSD = a^2 / (2f_{CLK})$, dove a è l'ampiezza dell'onda quadra corrispondente alla PRBS in ingresso, mentre f_{CLK} è la frequenza di *clock*. Nel nostro caso $f_{CLK} = 5kHz$ e $a = 4.8V$, quindi $PSD_t = 2.3 \times 10^{-3} V^2s$, compatibile con il risultato sperimentale entro la sua incertezza.