



## Esercitazione 01: Cavi coassiali

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

*Issue:* 1

*Date:* September 11, 2020

University of Trento  
Department of Physics  
Via Sommarive 14, 38123  
Povo (TN), Italy

## Introduzione

L'obiettivo di questa esercitazione è quello di misurare la capacità per unità di lunghezza  $\hat{C}$  e l'induttanza per unità di lunghezza  $\hat{L}$  di un cavo coassiale RG58C-U. A tale scopo viene effettuata la misura del tempo caratteristico  $\tau$  di scarica di, rispettivamente, un circuito RC ed un circuito RL. I cavi coassiali contribuiscono alle componenti capacitive e induttive di questi circuiti e, variando la lunghezza dei cavi, è possibile trovare  $\hat{C}$  ed  $\hat{L}$  attraverso un fit sulle misure di capacità e induttanza in funzione della lunghezza.

## 1 Setup

### 1.1 Materiali

- Breadboard;
- generatore di funzione d'onda *Rigol DG1022* (impedenza nominale in uscita  $R_s = 50 \Omega$ );
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi coassiali BNC-banana, cavi RG58 da 10 m BNC-BNC;
- 4 connettori a "T" BNC-BNC, 1 connettore BNC-banana;
- 1 induttanza  $L_0=100 \mu\text{H}$  nominale, 1 condensatore da  $(10.2 \pm 0.4) \text{ nF}$ , 2 resistori:  $(46.8 \pm 0.2) \Omega$  e  $(9944 \pm 1.3) \Omega$ .

### 1.2 Procedure di misura

Al fine di misurare la capacità dei cavi coassiali per unità di lunghezza montiamo il circuito in figura (1) nella quale la capacità dei cavi è rappresentata da un condensatore di capacità  $C$ .  $C_0$  vale  $(10.2 \pm 0.4) \text{ nF}$  mentre la resistenza  $R_1$  è di  $(9944.0 \pm 1.3) \Omega$ . Utilizzando una

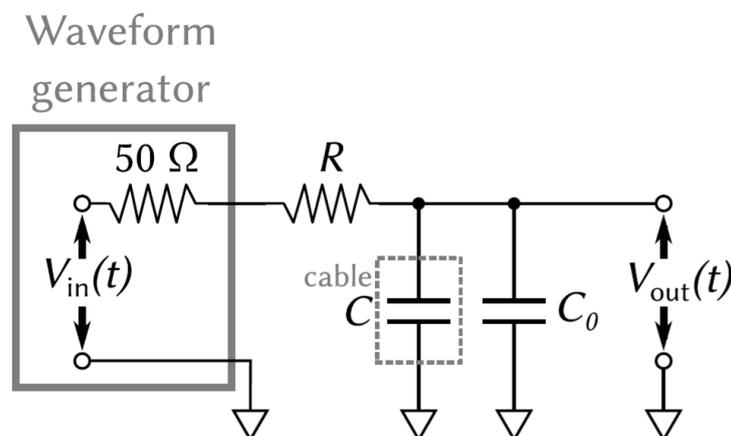


Figure 1: Circuito RC per la misura di  $C$ .

forma d'onda quadra in ingresso, impostiamo un'ampiezza  $V_0 = 5$  V (a 100 Hz) sul generatore di funzione d'onda e un offset pari a  $V_0/2$ . Misurando  $\tau$  attraverso un fit esponenziale dell'onda all'uscita del circuito ricaviamo C. Per la misura di capacità vengono presi 10000 punti per ognuna delle 5 acquisizioni per ogni lunghezza del cavo utilizzata; la misura viene effettuata per 5 volte per lunghezze diverse del cavo coassiale:  $\ell = 0$  m, 10 m, 20 m, 30 m, 40 m con incertezza di 1 cm.

Procediamo allo stesso modo per quanto riguarda la misura dell'induttanza dei cavi coassiali; utilizziamo la scarica del circuito in figura (2) nella quale l'induttanza dei cavi coassiali è rappresentata da un induttore  $L$  mentre  $L_0 = 100 \mu\text{H}$  nominali è un'ulteriore induttanza aggiunta da noi. La resistenza del circuito in questo caso vale  $R_2 = (46.8 \pm 0.2) \Omega$ .

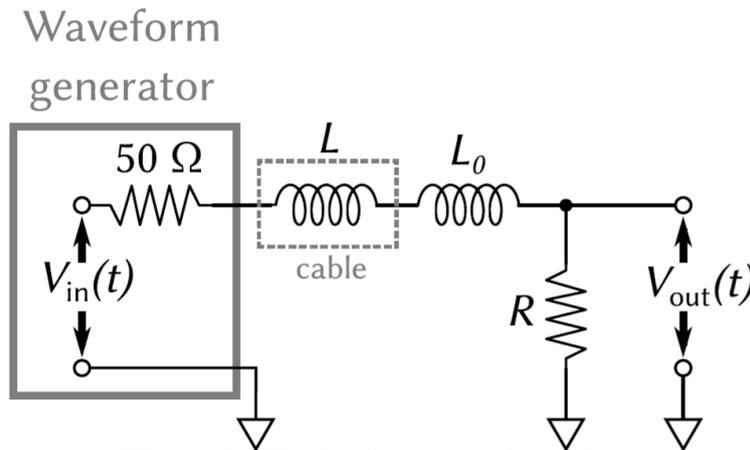


Figure 2: Circuito RL per la misura di L.

## 2 Descrizione e discussione dei risultati

L'analisi dei dati è suddivisa in due sotto sezioni, nella prima vengono esposti e commentati i dati ottenuti dalla misura della scarica del circuito  $RC$ . Nella seconda parte invece ci sarà la misura dell'induttanza per unità di lunghezza attraverso l'analisi del circuito  $RL$ . Non viene riportata una conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

### 2.1 Misura di capacità

La scala temporale dell'oscilloscopio è impostata in modo che sullo schermo siano presenti 4  $\tau$ , che in prima approssimazione vengono misurati con i cursori dell'oscilloscopio. La scala della tensione in ingresso invece è impostata in modo da ottenere il massimo guadagno verticale possibile, che nel nostro caso ( $V_0 = 5$  V) corrisponde a 0.7 V per divisione per ogni misura. L'errore inteso come deviazione standard sulle misure di differenza di potenziale vale pertanto  $\sigma[V_{out}] = 84$  mV (1.5% full scale).

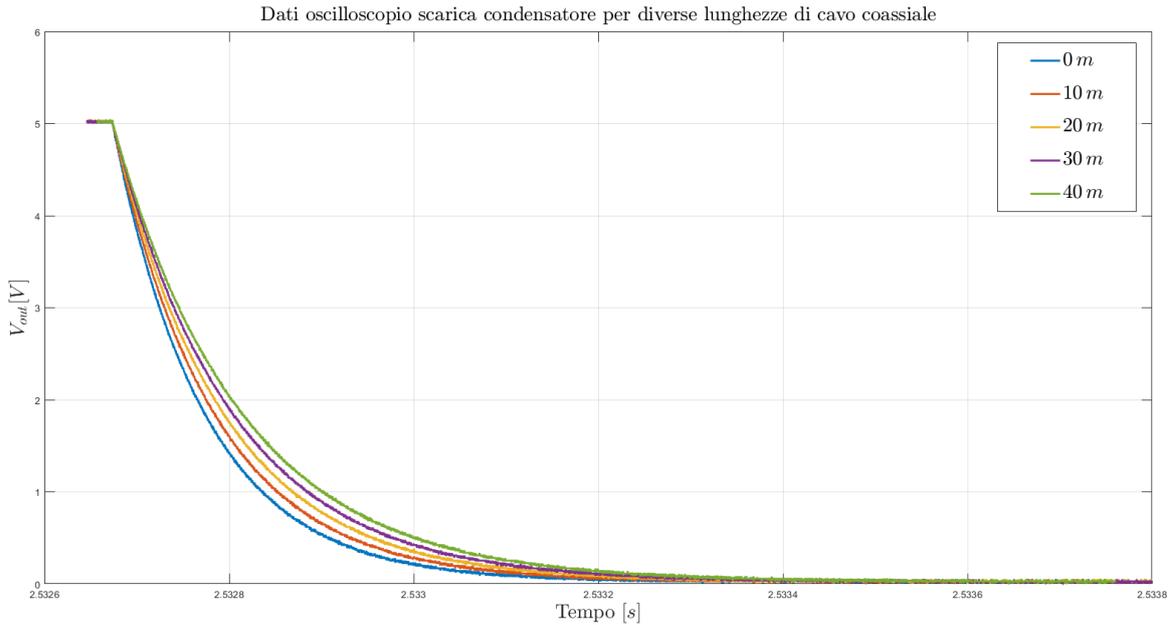
L'espressione che descrive l'andamento della differenza di potenziale in uscita durante la fase di scarica è:

$$V_{out}(t) = V_0^* e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta V = V_0^* e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{V_0^* e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \approx V_0^* e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{V_{out}} \right) \quad (1)$$

Applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri della (1) otteniamo

$$\ln(V_{out}^*) \approx \ln(V_0^*) - \frac{t}{\tau} + \frac{\delta V}{V_{out}} \implies \ln(V_{out}) \approx \alpha + \beta t + \gamma \left( \frac{1}{V_{out}} \right) \quad (2)$$

$V_{out}$  è la differenza di potenziale misurata dall'oscilloscopio al tempo  $t$ ,  $\tau = RC$  e  $V_0^*$  e  $\delta V$  sono parametri da determinare. Il termine  $\delta V$ , che si presuppone essere piccolo relativamente a  $V_0$ , è stato aggiunto per correggere lo zero errato dell'offset dell'oscilloscopio che non corrisponde con quello del generatore di funzione. Se non ci fosse questa correzione ci si troverebbe a dover fare il logaritmo di tensioni negative. Per ogni set di 5 misure di  $V_{out}$  otteniamo un valore di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (con le rispettive incertezze) tramite un fit lineare a 3 parametri. Possiamo visualizzare l'andamento esponenziale di  $V_{out}$  descritto dalla (1) nella seguente figura (Fig.3) dove per ogni lunghezza è stato effettuato un plot delle acquisizioni con colori differenti.



**Figure 3:** Plot dei dati acquisiti con l'oscilloscopio rispetto alla tensione in uscita al circuito, per valori differenti di  $\ell$ .

Poiché l'informazione sul valore di capacità è contenuta in  $\beta = -1/\tau$ , per ogni valore di  $\ell$  calcoliamo una media pesata di questo parametro con relative incertezze ottenendo i seguenti risultati:

$\beta$ [ $s^{-1}$ ]	$\sigma[\beta]$ [ $s^{-1}$ ]	$\ell$ [m]	$\sigma[\ell]$ [m]
-10338	2	0	0.01
-9339	5	10	0.01
-8514	3	20	0.01
-7830	3	30	0.01
-7233	3	40	0.01

dove  $\sigma[\beta]$  è l'errore sulla media, ovvero  $\sigma[\beta] = \frac{\sigma[\beta_i]}{\sqrt{5}}$  ( $\sigma[\beta_i]$  è lo scarto tipo calcolato dai parametri  $\beta$  di ciascuna acquisizione).

A questo punto possiamo trovare il valore per la capacità dei nostri circuiti RC per ogni valore di  $\ell$  sapendo che

$$C = -\frac{1}{R\beta}. \quad (3)$$

R in questo caso va considerato come il parallelo tra la serie delle resistenze  $R_1$  ed  $R_s$  con

la componente resistiva dell'impedenza interna dell'oscilloscopio:

$$R = \left( \frac{1}{R_s + R_1} + \frac{1}{R_{osc}} \right)^{-1}.$$

Effettuiamo quindi una regressione lineare del tipo

$$C = A\ell + B \quad (4)$$

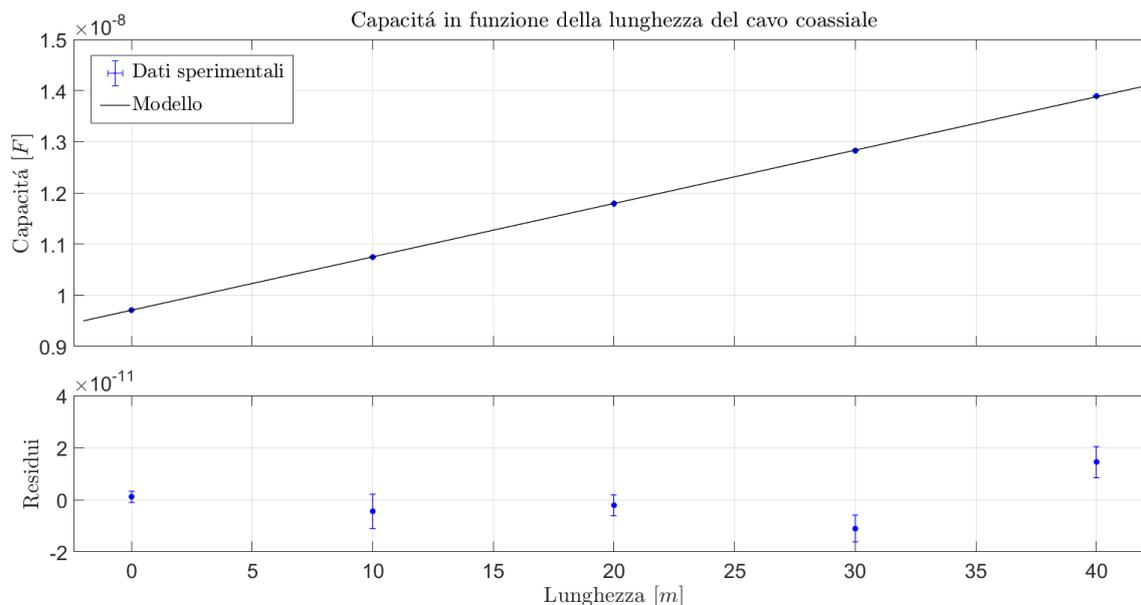
dove  $A$  sarà il valore di  $\hat{C}$  che cerchiamo, mentre  $B$  sarà la componente capacitiva del circuito che non varia al variare della lunghezza dei cavi, ovvero la somma della capacità dell'oscilloscopio, di  $C_0$  e della capacità dei corti cavi BNC-banana utilizzati nel circuito. Nel calcolo dell'incertezza su  $C$  per il fit, oltre alla normale propagazione degli errori conseguente da (3) abbiamo tenuto conto anche dell'incertezza trasferita da  $\ell$ , propagandola in incertezza su  $C$  come:

$$\sigma_{tot}[C] = \sqrt{\sigma[C]^2 + (|A_{graf}| \sigma_{ris}[\ell])^2}$$

dove  $A_{graf}$  è un valore approssimato di  $A$  trovato con il metodo di massima e minima pendenza. Tramite il metodo dei minimi quadrati otteniamo:

Parametro	Valore
$A$	101.2 pF/m
$\sigma[A]$	0.3 pF/m
$B$	9.88 nF
$\sigma[B]$	0.01 nF

I dati con la retta data dai parametri della regressione sono rappresentati nel grafico sottostante (Fig. 4); nella parte inferiore si trova invece il grafico dei residui tra punti sperimentali e modello. Notiamo dal grafico che i residui sembrano essere disposti casualmente



**Figure 4:** Nel grafico superiore  $C$  in funzione della lunghezza dei cavi, in quello inferiore i residui rispetto al modello. In blu i punti sperimentali, in nero la retta di regressione.

attorno allo zero e che i dati seguono un andamento lineare. Possiamo quindi calcolare il *chi quadrato ridotto* ottenendo così il valore  $\chi_r^2 = 2.29$ .

Vediamo che il valore di  $A = \widehat{C}$  calcolato è in accordo con quanto dichiarato sul datasheet del cavo coassiale entro 4 deviazioni standard. Inoltre anche il valore di B risulta compatibile con la stima teorica della componente invariante di C ovvero

$$B_{teo} = C_0 + C_{osc} + C_{short} = 10.311 \text{ nF},$$

dove  $C_{short}$  è la capacità teorica del cavo coassiale BNC-banana lungo 1 m. L'incertezza su  $B_{teo}$  è data solamente da  $C_0$  (assumiamo la capacità di oscilloscopio e cavo corto priva di incertezza), ovvero  $\sigma[B_{teo}] = 0.6 \text{ nF}$ . In questo caso la compatibilità di B con  $B_{teo}$  è garantita dalla grande incertezza relativa che abbiamo su C.

## 2.2 Misura di induttanza

Tutte le procedure di misura ed assegnazione degli errori per il circuito RL sono state fatte in maniera completamente analoga a quella della sottosezione precedente, con l'unica accortezza che in questo caso  $\tau = L/R$ .

Dopo aver effettuato il primo fit, otteniamo la tabella di valori seguente (notazione riferita alla (2)):

$\beta [ms^{-1}]$	$\sigma[\beta] [ms^{-1}]$	$\ell [m]$	$\sigma[\ell] [m]$
-978.3	0.7	0	0.01
-949.4	0.4	10	0.01
-928.4	0.5	20	0.01
-900.2	0.6	30	0.01
-893.0	3.5	40	0.01

dove, come in precedenza,  $\sigma[\beta]$  è l'errore sulla media, ovvero  $\sigma[\beta] = \frac{\sigma[\beta_i]}{\sqrt{5}}$  ( $\sigma[\beta_i]$  è lo scarto tipo calcolato dai parametri  $\beta$  di ciascuna acquisizione).

Si osserva che nell'ultimo dato della tabella (riferito alla lunghezza di 40 m), la deviazione standard risulta essere circa di 5 volte maggiore a quelle relative alle altre lunghezze. La misura dell'induttanza dei cavi coassiali come abbiamo visto richiede molta precisione ed una analisi specifica. Aggiungendo metri di cavo percorsi da corrente, si sta, inevitabilmente, costruendo un'antenna che capta onde elettromagnetiche a diverse frequenze presenti in laboratorio. Le diverse frequenze rivelate dal circuito si manifestano come armoniche di ordine superiore nel grafico della scarica che creano oscillazioni nel grafico della scarica dell'induttanza. Questo effetto, non trascurabile, ha conseguenze evidenti nella nostra analisi, tra cui l'aumento di deviazione standard tra acquisizioni della stessa forma d'onda e, più in generale, l'aumento dei residui tra modello e dati sperimentali.

A questo punto troviamo il valore dell'induttanza dei nostri circuiti RL per ogni valore di  $\ell$  sapendo che

$$L = -\frac{R_2 + R_s}{\beta}. \quad (5)$$

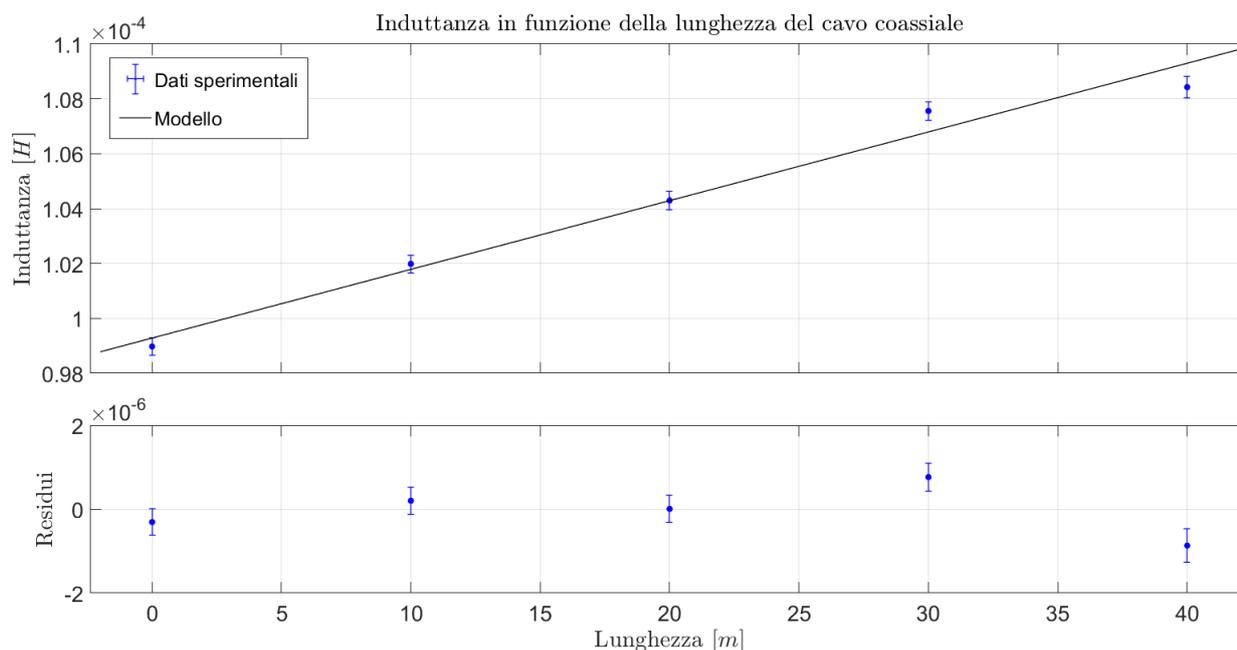
In questo caso trascuriamo la resistenza dell'oscilloscopio in quanto il suo contributo vale lo 0.1% rispetto a  $(R_2 + R_s)$ :

$$L = \widehat{L}\ell + L_{inv} \quad (6)$$

dove anche in questo caso  $L_{inv}$  sarà la componente induttiva del circuito invariante rispetto alla lunghezza dei cavi, ovvero la somma di  $L_0$  e delle ulteriori induttanze parassite del circuito. Tramite il metodo dei minimi quadrati otteniamo:

Parametro	Valore
$\hat{L}$	252 nH/m
$\sigma[\hat{L}]$	5 nH/m
$L_{inv}$	99.3 $\mu$ H
$\sigma[L_{inv}]$	0.3 $\mu$ H

I dati con la retta data dai parametri della regressione sono rappresentati nel grafico sottostante (Fig.5); nella parte inferiore si trova invece il grafico dei residui tra punti sperimentali e modello. Analogamente al fit precedente vediamo che i residui sembrano



**Figure 5:** Il grafico superiore rappresenta  $L$  in funzione della lunghezza dei cavi. In blu abbiamo i punti sperimentali, in nero la retta di regressione. Nel grafico inferiore invece sono rappresentati i residui tra i dati sperimentali e il modello dato dalla retta.

essere disposti casualmente attorno allo zero e che i dati seguono un andamento lineare. Calcolando il *chi quadrato ridotto* otteniamo  $\chi_r^2 = 3.83$ ; il valore così elevato può essere in parte dovuto alla sistematicità dell'errore dato dall'effetto "antenna" esposto sopra.

Notiamo che pure il valore di  $\hat{L}$  calcolato è in accordo con quanto dichiarato sul datasheet del cavo coassiale (0.25  $\mu$ H/m) entro una deviazione standard.

L'impedenza caratteristica di un cavo coassiale è dato dalla relazione

$$Z = \sqrt{\frac{\hat{L}}{\hat{C}}} \quad (7)$$

Se ora inseriamo i dati ottenuti dai fit precedenti nell'equazione, otteniamo il valore di impedenza caratteristica in accordo con il valore di 50  $\Omega$  tipico degli RG-58, entro due scarti tipo, il valore trovato è infatti  $Z = (49.1 \pm 0.5) \Omega$ .

È possibile dimostrare che, schematizzando il cavo coassiale come un condensatore cilindrico infinito, con raggio del conduttore interno  $a$  e raggio dell'armatura esterna  $b$ , la

capacità shunt e l'induttanza serie per unità di lunghezza del cavo possono essere espresse come

$$\widehat{C} = \frac{2\pi\varepsilon}{\log(b/a)}, \quad \widehat{L} = \frac{\mu \log(b/a)}{2\pi}$$

dove  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  e  $\mu = \mu_r \mu_0$  sono la permittività elettrica e la permeabilità magnetica del materiale contenuto tra le due armature.

Ora, utilizzando i valori di  $\widehat{C}$  e  $\widehat{L}$  trovati nella sezione precedente e facendo la ragionevole assunzione che  $\mu_r = 1$ , dalla seconda relazione possiamo ricavare  $\log(b/a)$  e sostituirla poi nella prima in modo da trovare la permittività relativa del dielettrico tra le armature. Otteniamo così

$$\log(b/a) = \frac{2\pi\widehat{L}}{\mu_0} = 1.26 \quad \implies \quad \varepsilon_r = \frac{\widehat{C} \log(b/a)}{2\pi\varepsilon_0} = 2.29$$

Notiamo che questo valore è pienamente in accordo con il valore della costante dielettrica tabulato per il polietilene a bassa densità (LDPE), utilizzato tipicamente per questo tipo di cavi.