



Esercitazione 05: Filtri attivi

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

Issue: 1

Date: September 11, 2020

University of Trento
Department of Physics
Via Sommarive 14, 38123
Povo (TN), Italy

Introduzione

L'obiettivo di questa esperienza è quello di studiare e realizzare diversi circuiti che implementano un filtro RC passa-basso del secondo ordine, anche attraverso l'utilizzo di uno o due operazionali. Oltre ad aspetti sperimentali, nella relazione sono presenti alcuni calcoli per trovare le funzioni di trasferimento in forma analitica.

1 Setup

1.1 Materiali

- Generatore di funzione d'onda *Rigol DG1022* (impedenza nominale in uscita $R_s = 50 \Omega$);
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi coassiali BNC-banana e BNC-BNC;
- resistori e capacitori vari;
- 2 Op-Amp OP07.

1.2 Procedure di misura

Vengono realizzati i filtri passa-basso del secondo ordine rappresentati in figura (1). Le

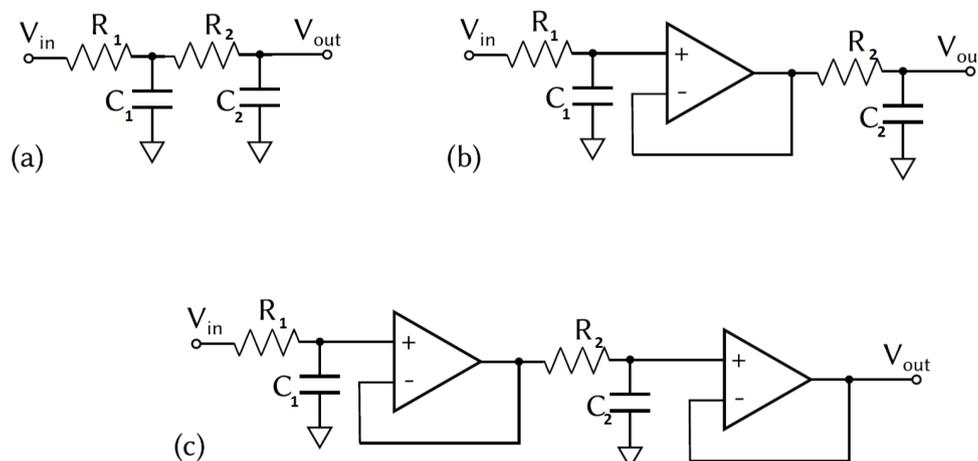


Figure 1: Diverse configurazioni che implementano un filtro passa-basso del secondo ordine.

due resistenze valgono $R_1 = (99400 \pm 11) \Omega$ e $R_2 = (99000 \pm 11) \Omega$ mentre i condensatori hanno capacità $C_1 = C_2 = (10.50 \pm 0.64) \text{ nF}$. Gli op-Amp utilizzati sono del tipo OP07; essi vengono alimentati fornendo una tensione di +12 V e -12 V ai rispettivi pin e limitando ciascun ramo dell'alimentatore a 20 mA. Come segnale in ingresso viene utilizzata inizialmente un'onda sinusoidale di ampiezza 5 V picco picco e frequenza variabile al fine di andare a rappresentare le funzioni di trasferimento dei circuiti. L'utilizzo delle medie

sull'oscilloscopio viene esplicitato caso per caso nell'analisi. Successivamente viene utilizzato un treno di impulsi di ampiezza 5 V e *duty-cycle* di 50 μ s e 100 μ s ad una frequenza di 100 Hz per valutare la risposta impulsionale. Per ogni filtro prendiamo un'acquisizione dell'oscilloscopio per questo segnale in ingresso.

Nella seconda parte dell'esperienza viene realizzato il filtro *Sallen-Key*, rappresentato in figura (2). I valori delle componenti, le impostazioni utilizzate e le procedure seguite

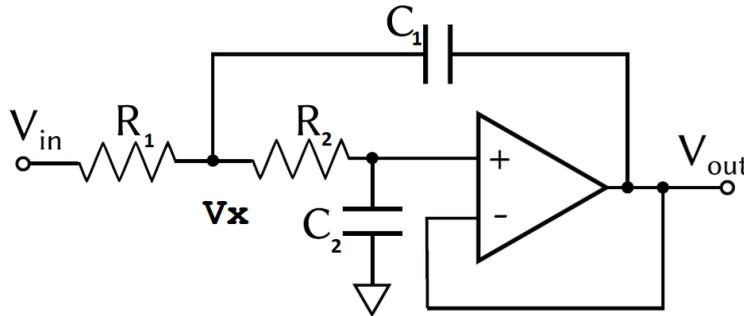


Figure 2: Filtro *Sallen-Key*.

sono le stesse descritte in precedenza. Ovvero viene studiata la risposta dell'oscilloscopio per 11 valori di frequenza per una sinusoidale e viene acquisita la risposta impulsionale per *duty-cycle* di 50 μ s e 100 μ s.

2 Descrizione e discussione dei risultati

L'analisi dei dati è suddivisa in due sotto sezioni: nella prima vengono esposti i risultati teorici ottenuti per il calcolo delle funzioni di trasferimento dei primi 3 filtri, con rispettive misure sperimentali. Nella seconda è presente l'analisi teorica per il circuito *Sallen-Key* confrontata con i risultati ottenuti sperimentalmente.

Non viene riportata una sezione per la conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

2.1 Filtri a due stadi

Partiamo dalla configurazione (1.a): calcoliamo la funzione di trasferimento sapendo che quella di un semplice circuito RC è $\tilde{G}(s) = 1/(1 + s\tau)$ dove $\tau = RC$. Effettuando l'analisi circuitale otteniamo come output per il filtro a due stadi

$$V_{out} = V_{in} \frac{1/sC}{R + 1/sC} \frac{1/sC}{1/sC + R + (R \parallel 1/sC)} \quad (1)$$

dalla quale si ottiene la funzione di trasferimento

$$\tilde{G}_a(s) = \frac{1}{1 + 3s\tau + s^2\tau^2} \quad (2)$$

È possibile calcolare anche l'impedenza in uscita da questo circuito considerando

$$Z_{out}^a = \frac{1}{sC} \parallel \left(R + R \parallel \frac{1}{sC} \right) = R(2 + s\tau) \frac{1}{1 + 3s\tau + s^2\tau^2} = R(2 + s\tau) \tilde{G}_a(s) \quad (3)$$

A questo punto vale la pena trovare la funzione di trasferimento nel dominio del tempo, in modo da riuscire ad avere un confronto con la risposta impulsionale sperimentale. Effettuiamo allora l'antitrasformata di Laplace di $\tilde{G}_a(s)$ con l'aiuto del metodo dei fratti semplici. Otteniamo

$$G_a(t) = \frac{1}{\sqrt{5}\tau} \left(e^{(\sqrt{5}-3)\frac{t}{2\tau}} - e^{(-\sqrt{5}-3)\frac{t}{2\tau}} \right) \quad (4)$$

Possiamo verificare se questa funzione corrisponde effettivamente alla risposta del circuito ad uno stimolo impulsivo. Utilizzando un impulso con *duty-cycle* di $100 \mu\text{s}$ e voltaggio 5 V otteniamo il segnale in figura seguente (Fig.3). Oltre ai dati sperimentali è presente un fit alla $G_s(t)$ dove i parametri (differenti) da determinare sono il τ presente ad esponente e quello a denominatore. Il fit viene fatto su due valori differenti poiché chiaramente non

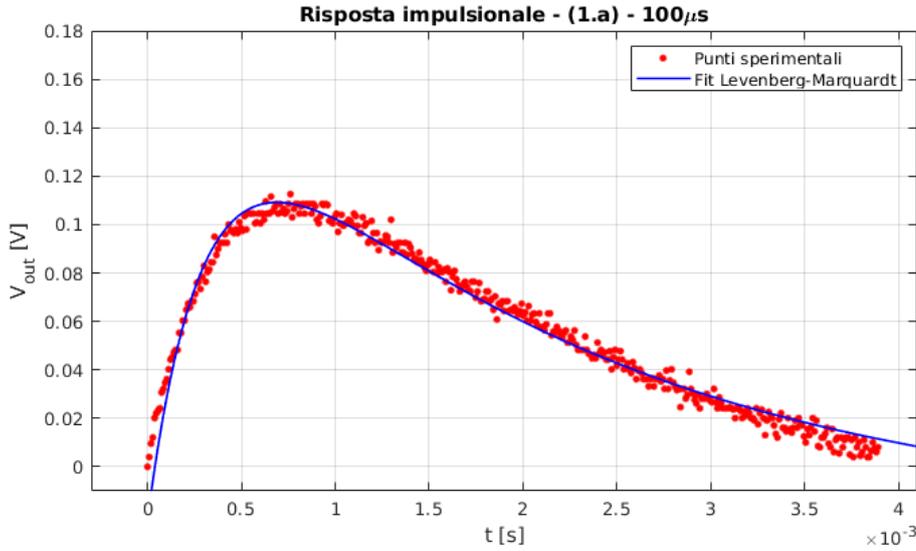


Figure 3: Risposta impulsionale con fit per la configurazione (1.a), onda in ingresso con *duty-cycle* di $100 \mu\text{s}$.

abbiamo in ingresso una δ di Dirac con durata infinitesima e di ampiezza infinita (oltre al fatto che la propagazione del segnale nel circuito non è istantanea: c'è un ritardo); pertanto la funzione di trasferimento necessita di una costante di normalizzazione che chiamiamo q_a . Il fit è allora effettuato sulla funzione

$$G'_a(t) = \frac{1}{q_a\sqrt{5}} \left(e^{(\sqrt{5}-3)\frac{t}{2\tau}} - e^{(-\sqrt{5}-3)\frac{t}{2\tau}} \right) \quad (5)$$

È altresì necessario precisare che i punti sperimentali per seguire una funzione di questo devono subire una traslazione temporale e di tensione. I punti acquisiti tramite la schermata dell'oscilloscopio sono inoltre stati campionati casualmente per ridurre l'effetto di quantizzazione dello strumento e la loro incertezza è stata trascurata per i fini del fit in quanto le incertezze sono state ricalcolate a posteriori. Questa procedura è stata effettuata anche per i fit successivi.

I risultati che otteniamo, entro un intervallo di confidenza del 95% sono $q_a = (2.58 \pm 0.04)$ s e $\tau = (0.81 \pm 0.02)$ ms. Notiamo comunque dalla figura (3) che il fit non segue particolarmente bene i dati sperimentali, la causa di questa incompatibilità è da cercare nelle due assunzioni fatte fino ad ora. La prima era implicita nell'utilizzo di $G'_a(t)$ per il fit, infatti questa funzione di trasferimento non tiene conto dell'effetto dello strumento di misura sul segnale in uscita. Non possiamo però effettuare questa approssimazione senza scrupoli;

infatti la parte resistiva dell'impedenza dell'oscilloscopio vale $1\text{ M}\Omega$, che non è molto più grande della Z_{out} del nostro circuito, basti pensare che per basse frequenze la (3) ci dà $Z_{out} \approx 2R = 0.2\text{ M}\Omega$.

La seconda approssimazione invece è quella di considerare il nostro segnale in ingresso come una δ di Dirac, quando non è né di durata temporale infinitesima, né di ampiezza infinita. Come ultima nota osserviamo che con i capacitori e resistori utilizzati (mediando sui 2 differenti valori) il valore di τ dovrebbe essere $\tau_{teo} = (1.05 \pm 0.06)\text{ ms}$ e che il valore trovato attraverso il fit non risulta compatibile, essendo le cause da attribuire alle ragioni appena elencate.

Di seguito (Fig.4) è invece riportato il diagramma di Bode teorico per questo circuito, insieme ai punti sperimentali acquisiti per 11 frequenze.

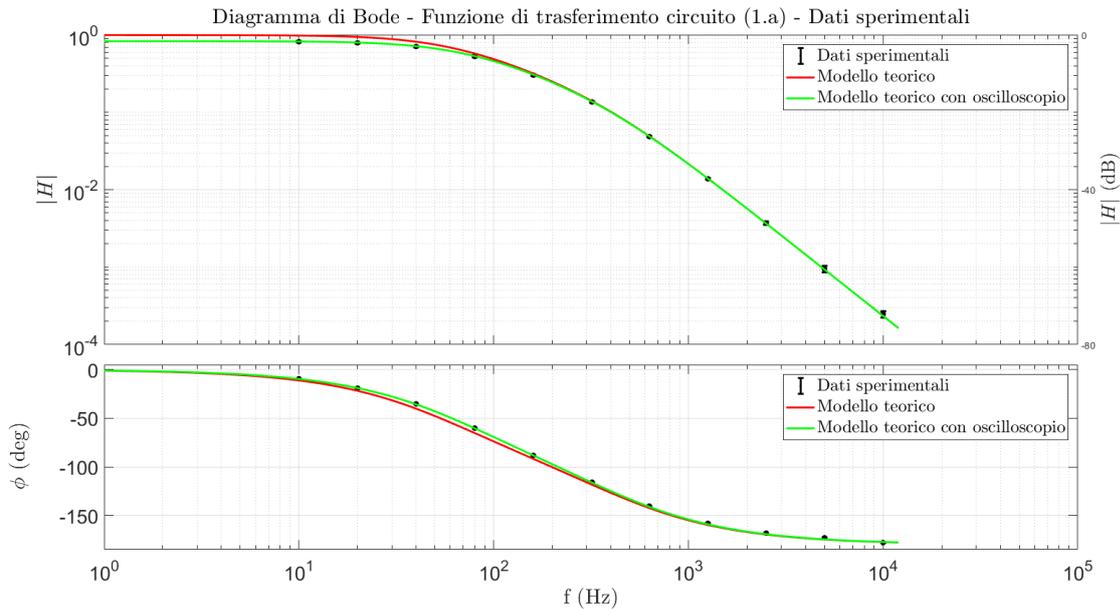


Figure 4: Diagramma di Bode per i dati sperimentali e modello di funzione di trasferimento teorico del circuito in figura (1.a)

Vediamo che sebbene l'andamento dei dati sperimentali di modulo e fase di $\tilde{G}_a(s)$ sia simile a quello teorico, non è garantita una completa compatibilità soprattutto per basse frequenze. La causa dell'incompatibilità è ancora da imputare all'approssimazione fatta decidendo di trascurare l'oscilloscopio, la cui impedenza non è più così grande rispetto a quella in uscita del circuito per basse frequenze. A riprova di questo fatto vediamo che i dati sperimentali risultano compatibili a tutte le frequenze con il modello teorico corretto (fit verde).

Per quanto riguarda il filtro in configurazione (1.b) l'analisi circuitale risulta più semplice della precedente. Infatti essendo presente l'operazionale come follower l'impedenza in uscita dal primo stadio è pressoché nulla e comunque approssimabile a 0. L'output è pertanto identico a quello dato dalla relazione (1) a meno del fattore $R \parallel 1/sC$ (impedenza in uscita del primo stadio) nel secondo denominatore. Si verifica immediatamente che allora vale

$$\tilde{G}_b(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^2} \quad (6)$$

notiamo che questa funzione di trasferimento è semplicemente il prodotto del guadagno di due circuiti RC. In questo caso cambia anche l'impedenza in uscita totale chiaramente, ed

essendo quella del primo stadio trascurabile, abbiamo

$$Z_{out}^b = \frac{1}{sC} \parallel R = \frac{R}{1 + s\tau}$$

Ci calcoliamo di nuovo la funzione di trasferimento nello spazio dei tempi facendo l'antitrasformata di $\tilde{G}_b(s)$, che questa volta risulta

$$G_b(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

Possiamo verificare anche in questo caso la compatibilità con i dati sperimentali di risposta impulsionale (fig.5). Analogamente al fit precedente usiamo due parametri: q_b per la normalizzazione e τ con l'usuale significato:

$$G'_b(t) = \frac{t}{q_b^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Notiamo subito che questo fit sembra essere in accordo con i punti sperimentali, i quali

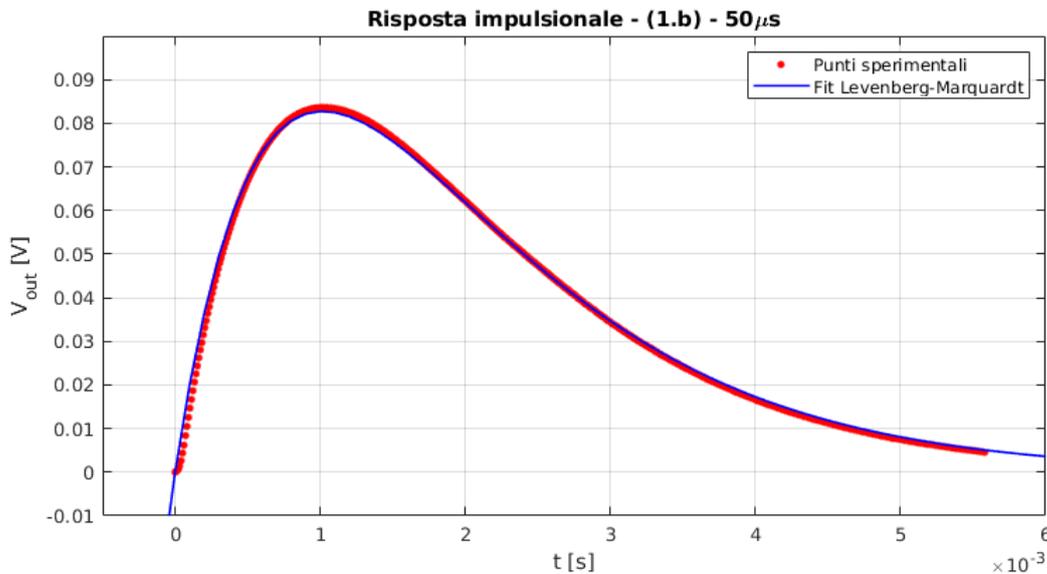


Figure 5: Risposta impulsionale con fit per la configurazione (1.b), onda in ingresso con *duty-cycle* di 50 μ s, 8 medie.

presentano meno fluttuazioni dei precedenti grazie all'utilizzo di 8 medie sull'oscilloscopio. I parametri ottenuti dal fit sono $q_b = (0.067 \pm 0.001)$ s e $\tau = (1.02 \pm 0.01)$ ms, che risulta in accordo con τ_{teo} entro una deviazione standard. Vediamo allora che questa risposta impulsionale risulta molto più accurata della precedente, grazie al fatto che l'impedenza in uscita di questo circuito risulta minore di quello in configurazione (1.a) ed inoltre qui il segnale in ingresso è stato dimezzato per quanto riguarda la durata temporale.

Riportiamo anche per questo circuito il diagramma di Bode con confronto tra modello teorico e punti sperimentali (Fig.6).

Vediamo per questo grafico un netto miglioramento rispetto al precedente, infatti i punti sperimentali di modulo e fase di $\tilde{G}_b(s)$ sono tutti in accordo con la funzione di trasferimento teorica entro due deviazioni standard. Rispetto a prima infatti l'impedenza in uscita del circuito è diminuita per queste frequenze di lavoro, quindi la correzione necessaria per tenere conto dell'oscilloscopio sarebbe minore.

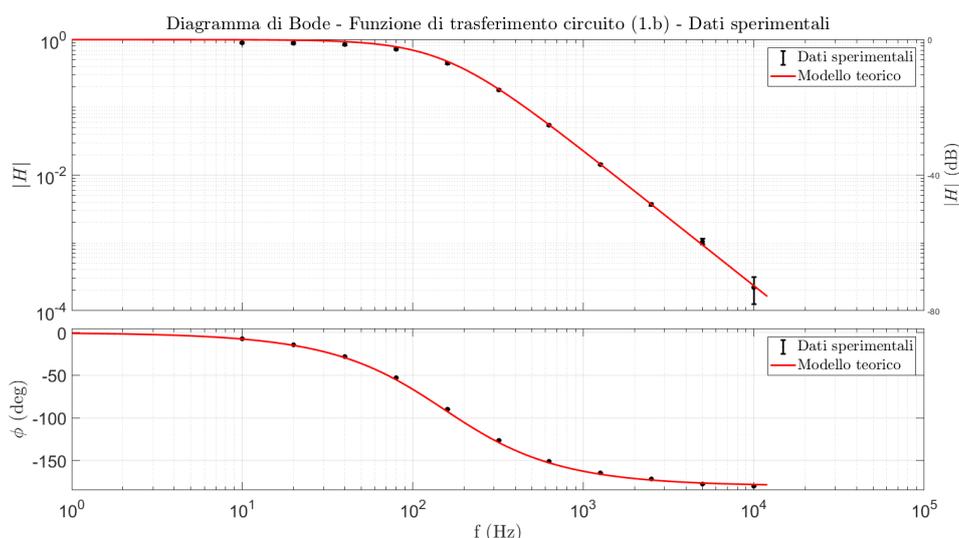


Figure 6: Diagramma di Bode per i dati sperimentali e modello di funzione di trasferimento teorico del circuito in figura (1.b)

Per la configurazione in figura (1.c), il calcolo delle funzioni di trasferimento nel dominio delle frequenze e del tempo è esattamente uguale a quello effettuato per la configurazione (1.c). La presenza del *buffer* in uscita al circuito infatti non ne modifica l'output a circuito aperto e abbiamo

$$\tilde{G}_c(s) = \tilde{G}_b(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^2} \quad \Rightarrow \quad G_c(t) = G_b(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il vantaggio di questa configurazione è però l'impedenza in uscita del circuito, che a questo punto non è più uguale a quella del caso precedente ma è pari a quella dell'operazionale (idealmente nulla). Le misure effettuate con l'oscilloscopio per la funzione di trasferimento pertanto non necessitano alcuna correzione (Fig.7). Vediamo infatti che tutti i punti sper-

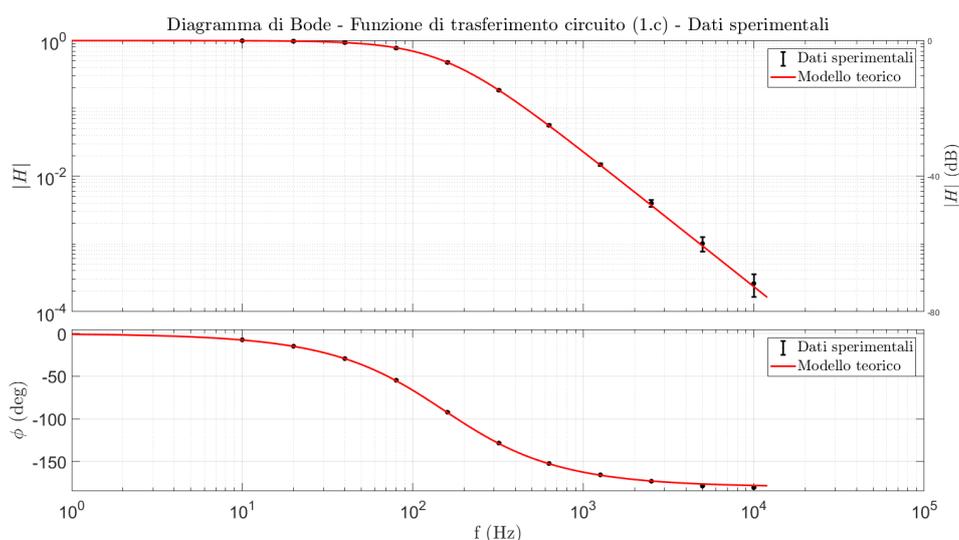


Figure 7: Diagramma di Bode per i dati sperimentali e modello di funzione di trasferimento teorico del circuito in figura (1.c)

imentali seguono il modello teorico entro una deviazione standard.

Per completezza riportiamo di seguito la risposta impulsionale anche di questo circuito (Fig.8). La funzione su cui viene effettuato il fit a due parametri è ancora $G'_c(t) = G'_b(t)$,

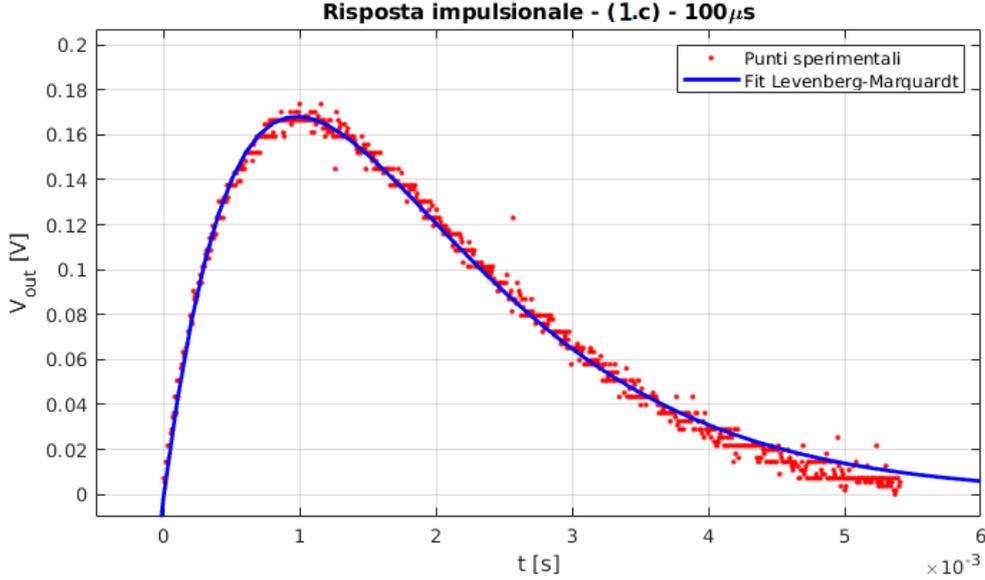


Figure 8: Risposta impulsionale con fit per la configurazione (1.c), onda in ingresso con *duty-cycle* di 100 μs.

salvo ora chiamare q_c il fattore di normalizzazione per questioni di notazione. Anche in questo caso, nonostante non siano state utilizzate medie, il fit è in accordo dati con sperimentali soprattutto nella parte iniziale dell'impulso (essendo quella finale più rumorosa). Anche questa volta il valore di τ trovato è in accordo con quello aspettato entro due scarti tipo, otteniamo infatti $q_c = (0.046 \pm 0.001)$ s e $\tau = (0.97 \pm 0.01)$ ms.

2.2 Filtro di Sallen-Key

Prima di verificarne la compatibilità con il modello sperimentale, calcoliamo il guadagno teorico del filtro *Sallen-Key*, tenendo comunque presente che analogamente al caso (1.c) l'impedenza in uscita del circuito vale $Z_{out} \approx 0$. Utilizziamo il teorema di Millman per scrivere la tensione nei punti V_x e V_+ :

$$V_x = \frac{V_{in}/R + V_+/R + V_{out}sC}{sC + 2/R}; \quad V_+ = \frac{V_x/R}{sC + 1/R}$$

dove è stata utilizzata l'approssimazione che non ci sia corrente sul canale non-invertente dell'OP07 (corrente di *bias* tipica 2 nA).

A questo punto possiamo mettere a sistema queste equazioni per eliminare la variabile V_x . L'approssimazione a massa virtuale del canale non-invertente inoltre ci permette di poter scrivere $V_+ = V_{out}$, che ci porta all'output

$$V_{out} = V_{in} \frac{1}{1 + 2s\tau + s^2\tau^2}$$

ovvero otteniamo $\tilde{G}_{SK}(s) = \tilde{G}_b(s) = \tilde{G}_c(s)$. Notiamo allora che questo filtro ha proprietà del tutto analoghe (funzione di trasferimento e Z_{out}) alla configurazione (1.c), ma rispetto ad essa presenta il grande vantaggio di utilizzare solamente un operazionale.

Valendo $\tilde{G}_{SK}(s) = \tilde{G}_b(s)$, avremmo che anche per il *Sallen-Key* la funzione di trasferimento nel dominio temporale è data dalla (7).

Ancora una volta analizziamo allora la risposta impulsionale sperimentale con quella teorica facendo un fit alla funzione $G'_{SK}(t) = G'_c(t)$, il risultato è rappresentato nella figura seguente (9) Di nuovo il fit risulta in accordo con i dati sperimentali soprattutto per quanto

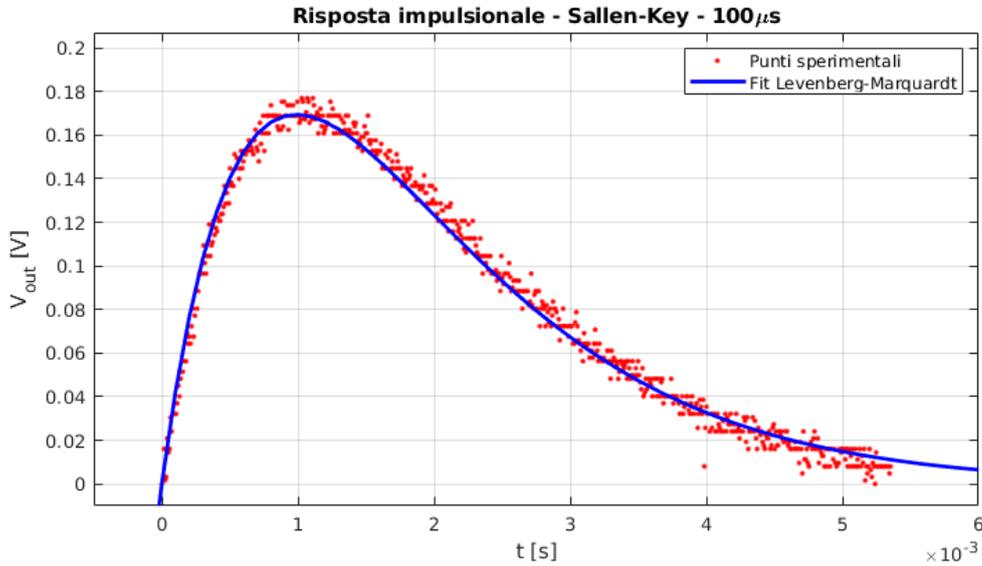


Figure 9: Risposta impulsionale con fit per la configurazione *Sallen-Key*, onda in ingresso con *duty-cycle* di $100 \mu\text{s}$.

riguarda la prima parte (meno rumorosa) dell'impulso. I parametri ottenuti dal fit sono $q_{SK} = (0.046 \pm 0.001) \text{ s}$ e $\tau = (0.99 \pm 0.01) \text{ ms}$. Il valore di τ così ottenuto è compatibile con quello aspettato teoricamente entro una deviazione standard.

Verifichiamo infine la compatibilità tra funzione di trasferimento teorica e sperimentale attraverso una rappresentazione con un grafico di Bode (Fig.10).

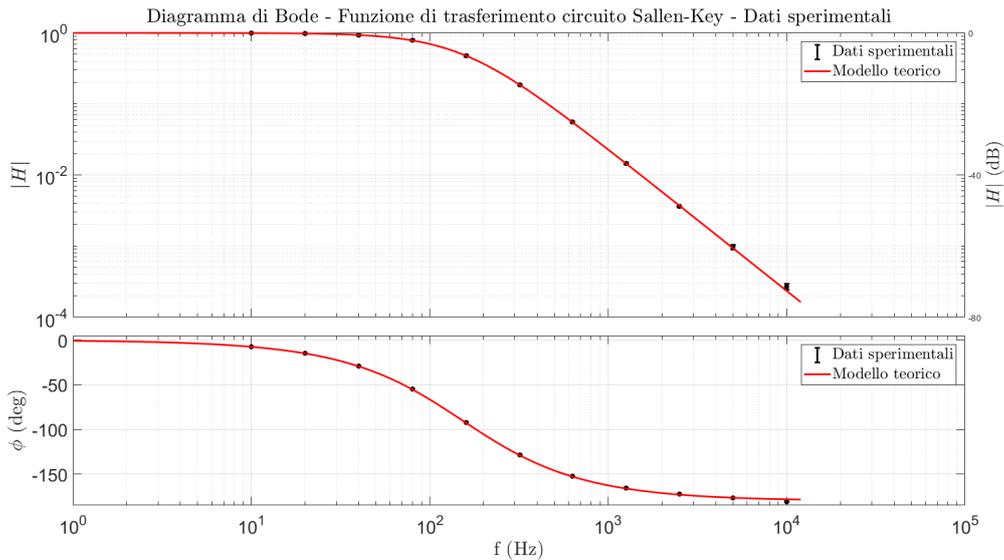


Figure 10: Diagramma di Bode per i dati sperimentali e modello di funzione di trasferimento teorico del circuito in figura (2)

Di nuovo, l'effetto dell'oscilloscopio sulla misura è totalmente trascurabile ($Z_{out} \approx 0$) e i punti sperimentali sono in accordo entro uno scarto tipo con la funzione di trasferimento teorica.