



## Esercitazione 06: Op-amp come oscillatore

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

*Issue:* 1

*Date:* September 11, 2020

University of Trento  
Department of Physics  
Via Sommarive 14, 38123  
Povo (TN), Italy

---

# Introduzione

L'obiettivo di questa esperienza è quello di realizzare un circuito che implementi un oscillatore armonico prima smorzato e poi libero. Il circuito finale è basato su due integratori in cascata e sulla chiusura di un loop collegando l'output del secondo integratore, previa inversione, all'input del primo.

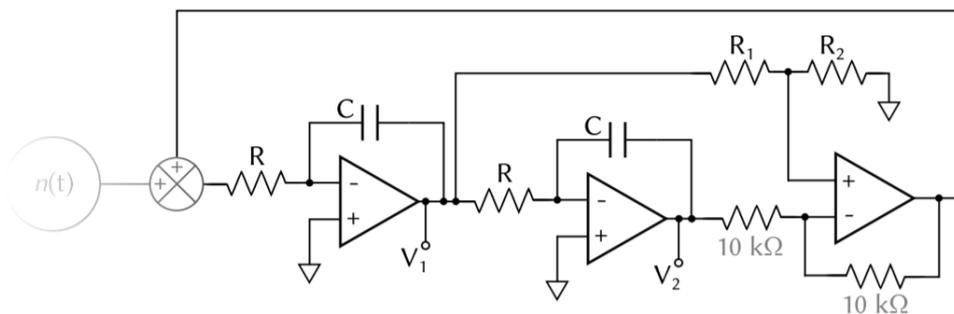
## 1 Setup

### 1.1 Materiali

- Generatore di funzione d'onda *Rigol DG1022* (impedenza nominale in uscita  $R_s = 50 \Omega$ );
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi coassiali BNC-banana e BNC-BNC;
- resistori e capacitori vari;
- 3 Op-Amp OP07, 2 diodi 1N4448.

### 1.2 Procedure di misura

Inizialmente montiamo il circuito in figura (1) che implementa l'oscillatore armonico smorzato. I valori utilizzati per le resistenze sono  $R = (99.82 \pm 0.01) \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = (1.003 \pm 0.002) \text{ M}\Omega$ ,

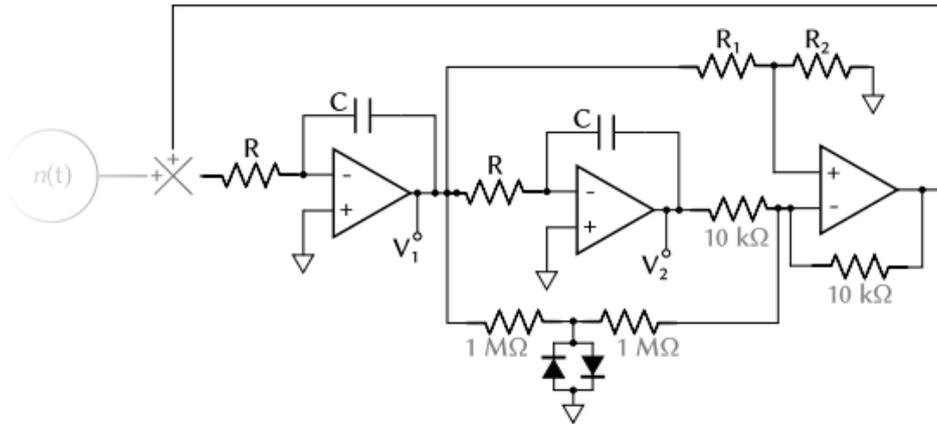


**Figure 1:** Circuito oscillatore armonico smorzato.

$R_2 = (98.8 \pm 0.2) \Omega$  per i due resistori da  $10 \text{ k}\Omega$  abbiamo  $R_{10}^{sx} = (9.975 \pm 0.001) \text{ k}\Omega$  e  $R_{10}^{dx} = (9.967 \pm 0.001) \text{ k}\Omega$ . Per entrambi i condensatori abbiamo  $C = (10.2 \pm 0.2) \text{ nF}$ . Per diversi valori di  $R_1$  e  $R_2$  meglio specificati nella sezione successiva vengono acquisite varie schermate dell'oscilloscopio della risposta del circuito ad un'eccitazione esterna sia in  $V_1$  che  $V_2$ .

Nella seconda parte dell'esperienza viene invece implementato il circuito seguente (Fig.2) che fornisce invece un'oscillazione non smorzata. Acquisiamo ancora schermate del segnale in  $V_1$  e  $V_2$  per i casi con  $C$  ed  $R$  precedenti, con  $C = (62.5 \pm 0.4) \text{ nF}$  ed  $R$  precedente, con  $C = (10.2 \pm 0.2) \text{ nF}$  ed  $R = (46.638 \pm 0.006) \text{ k}\Omega$ . Infine acquisiamo schermate nel caso

con  $R$  e  $C$  del circuito precedente ma con l'amplificatore a guadagno doppio, ovvero uno dei resistori utilizzati nella rete sul canale invertente è  $R = (19.913 \pm 0.003) \text{ k}\Omega$ .



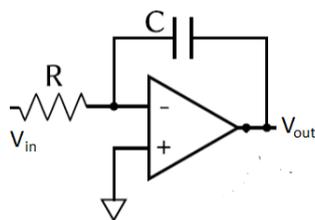
**Figure 2:** Circuito oscillatore armonico con compensazione dello smorzamento.

## 2 Descrizione e discussione dei risultati

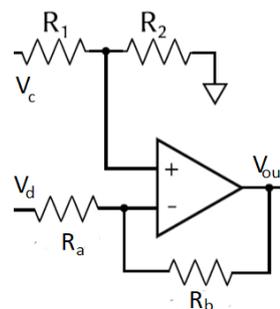
L'analisi dei dati è suddivisa in due sotto sezioni: nella prima vengono esposti i risultati teorici ottenuti per il circuito dell'oscillatore armonico smorzato, con rispettive misure sperimentali. Nella seconda è presente l'analisi teorica per il circuito che implementa la compensazione dello smorzamento confrontata con i risultati ottenuti sperimentalmente. Non viene riportata una sezione per la conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

### 2.1 Oscillatore armonico smorzato

Calcoliamo innanzitutto il guadagno dell'oscillatore smorzato rappresentato in figura (1). A tal fine possiamo studiare separatamente i guadagni dei due integratori e dell'amplificatore presenti nel circuito, facendo uso delle impedenze generalizzate nello spazio delle frequenze. Rappresentiamo i due circuiti in figura (3) e (4). Per ricavare l'uscita  $V_{out}$  dell'integratore



**Figure 3:** Integratore.



**Figure 4:** Amplificatore

si può partire dalla relazione

$$V_- = \frac{\frac{1}{R}V_{in} + sCv_{out}}{\frac{1}{R}} ;$$

sappiamo inoltre che

$$V_{out} = A(V_+ - V_-) = -AV_- = -A \frac{V_{in} + s\tau V_{out}}{1 + s\tau}$$

con A amplificazione dell'op-Amp e  $\tau = RC$ . Esplicitando  $V_{out}$  e prendendone il limite per A che tende a infinito otteniamo

$$\frac{V_{in}}{V_{out}} = -\frac{1}{s\tau} . \quad (1)$$

Seguiamo lo stesso procedimento per l'amplificatore:

$$V_+ = \frac{R_2}{R_2 + R_1} V_c$$

$$V_- = \frac{\frac{1}{R_a} V_d + \frac{1}{R_b} V_{out}}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}} .$$

Dalla relazione  $V_{out} = A(V_+ - V_-)$  ricaviamo

$$V_{out} = \frac{R_a + R_b}{R_a} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_c - \frac{R_b}{R_a + R_b} V_d \right) . \quad (2)$$

Riferendoci alla figura (1) risulta ora evidente che

$$V_1 = -\frac{1}{s\tau} V_{in}$$

$$V_2 = \frac{1}{s^2\tau^2} .$$

Da questi e dalla relazione ricavata per l'amplificatore otteniamo il guadagno a *open-loop*

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = G_{OL} = -\left( 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{s\tau} + \frac{1}{s^2\tau^2} \right) \quad (3)$$

mentre il guadagno *close-loop* si trova tramite il rapporto

$$G_{CL} = \frac{1}{1 - G_{OL}} . \quad (4)$$

Siccome bisogna valutare la stabilità del circuito, siamo interessati ai poli di  $G_{CL}$ , ovvero agli zeri di  $1 - G_{OL}$ . Se questi hanno parte reale negativa allora possiamo concludere che il circuito è stabile. Dobbiamo quindi trovare le soluzioni dell'equazione

$$f(s) \equiv 1 + 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{s\tau} + \frac{1}{s^2\tau^2} = 0 , \quad (5)$$

dove l'incognita è rappresentata da  $s\tau$ . Tramite alcuni passaggi otteniamo

$$s^2\tau^2 + 2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} s\tau + 1 = 0$$

che ha soluzione

$$s\tau = -\frac{R_2}{R_2 + R_1} \pm i \sqrt{1 - \left( \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right)^2} . \quad (6)$$

Notiamo che gli zeri sono a parte reale negativa, quindi il circuito è stabile.

La stabilità può essere valutata con la tecnica del Nyquist path. Anche in questo caso

dobbiamo verificare che  $\Re[f(s)] < 0$ . Il "teorema dell'argomento principale di Cauchy" afferma che presa una funzione  $f(s)$ , vale che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = Z - P \tag{7}$$

dove Z e P sono rispettivamente gli zeri e i poli contenuti nel cammino di integrazione. Scegliamo questo cammino come in figura (5) in modo tale che esso non passi per il polo in zero della nostra funzione e tale che  $D \rightarrow \infty$  e  $d \rightarrow 0$ . Per valutare l'integrale a primo

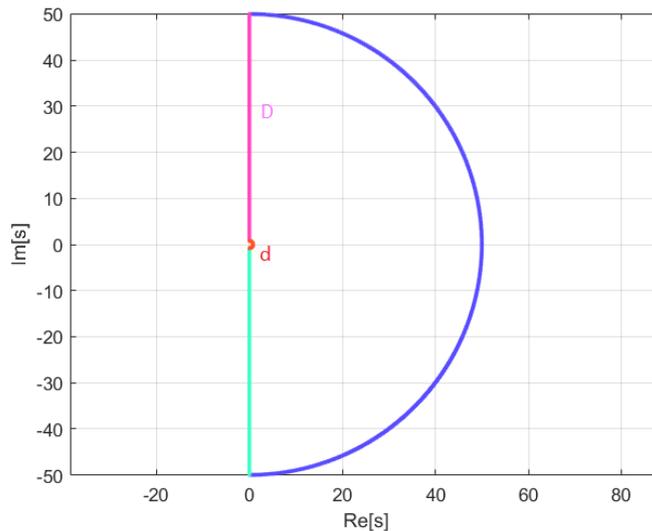


Figure 5: Cammino di integrazione  $\Gamma$ .

membro di (7) effettuiamo il cambio di variabile  $v = f(s)$  ottenendo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(s)}{f(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\Gamma)} \frac{dv}{v} = N$$

con N numero di avvolgimenti di  $f(\Gamma)$  attorno all'origine. In figura (6) rappresentiamo il percorso trasformato a seguito del cambio di variabile e uno zoom nell'origine. Dal grafico

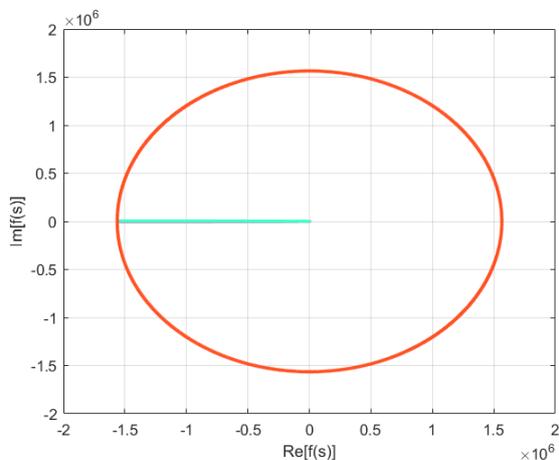


Figure 6: Percorso dato dal cambio di variabile.

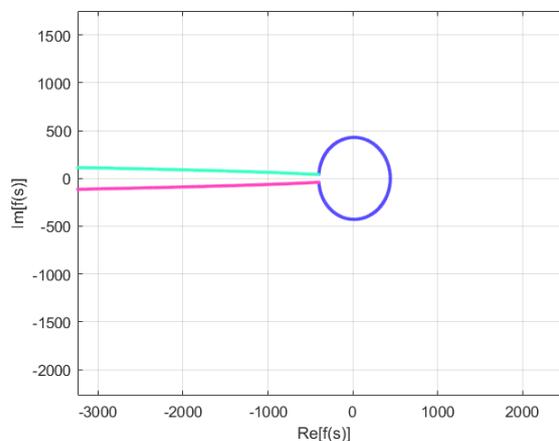


Figure 7: Zoom attorno all'origine.

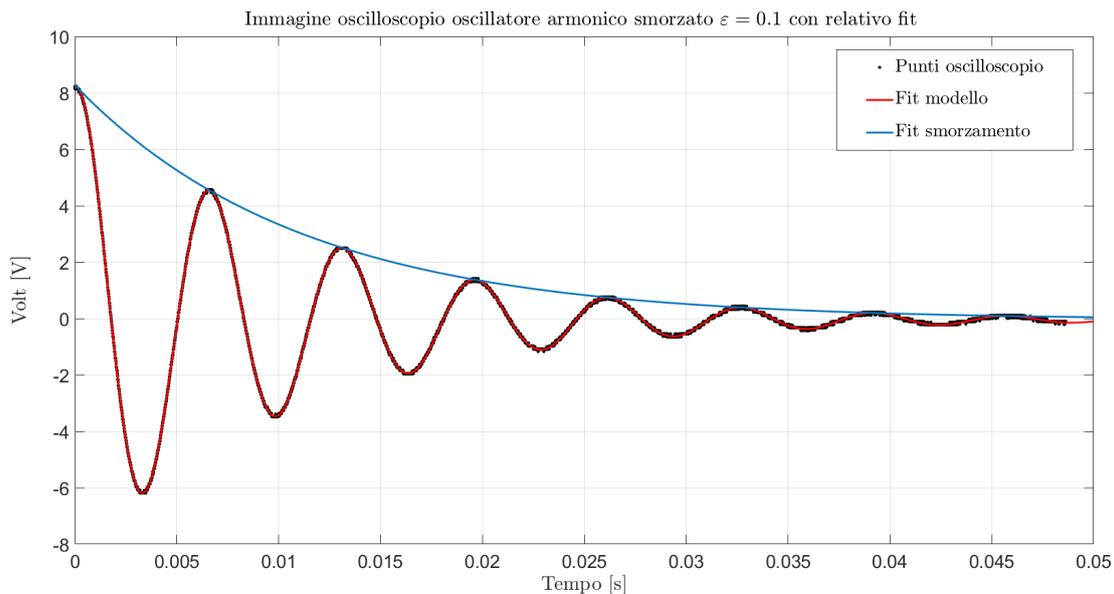
si nota che  $f(\Gamma)$  non gira attorno all'origine: il valore dell'integrale è nullo, ed essendo nullo anche il numero dei poli contenuti all'interno del circuito originale possiamo affermare che nella parte destra del piano complesso ( $\Re[f(s)] > 0$ ) non sono presenti zeri. Il circuito è quindi stabile.

Una volta assemblato il circuito in figura (1), siamo andati a misurare la tensione all'uscita dei due op-amp integratori. Siccome al circuito non è dato in ingresso nessun segnale, se non il rumore, per osservarne il comportamento è stato necessario connettere brevemente a  $V_{++}$  il pin invertente di uno dei due integratori per eccitare il circuito. Misurare l'uscita del circuito a  $V_1$  oppure a  $V_2$  cambia solo per uno sfasamento reciproco dei segnali di  $\pi/2$ , si può riassumere ciò dicendo che i due segnali sono in quadratura. Concentrandoci su un'uscita dell'oscilloscopio, si osserva che il segnale, dopo che è stato eccitato il circuito, si smorza. Dalle considerazioni precedenti possiamo aggiungere che lo smorzamento è di tipo esponenziale, dato che il circuito rappresenta un'implementazione dell'oscillatore armonico smorzato. Sfruttando la funzione Roll dell'oscilloscopio, abbiamo dunque acquisito delle immagini dell'oscilloscopio sullo smorzamento del circuito in funzione del rapporto tra le resistenze  $R_1$  e  $R_2$ . Da queste immagini, abbiamo poi fittato i punti sperimentali, assumendo che la soluzione fosse quella dell'oscillatore armonico smorzato, quindi la funzione,

$$f(x) = A + B \cos(\omega x + \phi) e^{-\frac{x}{\tau_s}} \quad (8)$$

dove il parametro  $A$  è stato aggiunto per tener conto di un eventuale offset del segnale. Poi  $B$  rappresenta la ampiezza dell'onda (nel nostro caso  $x$  è il tempo),  $\omega = 2\pi f$  è la pulsazione con  $f$  frequenza,  $\phi$  rappresenta un eventuale sfasamento del coseno rispetto all'origine e infine  $\tau_s$  è il tempo tipico di smorzamento.

Un esempio è riportato in figura (9), questa acquisizione è stata fatta utilizzando  $R_1 = 1M\Omega$  e  $R_2 = 100 k\Omega$  ( $\varepsilon = 0.1$ ). Sono presenti due fit, il primo che segue tutti i punti sperimentali è stato fatto sulla funzione sopra, mentre per il secondo si è usato solo il contributo dato dall'esponenziale, non considerando l'oscillazione data dal coseno. La

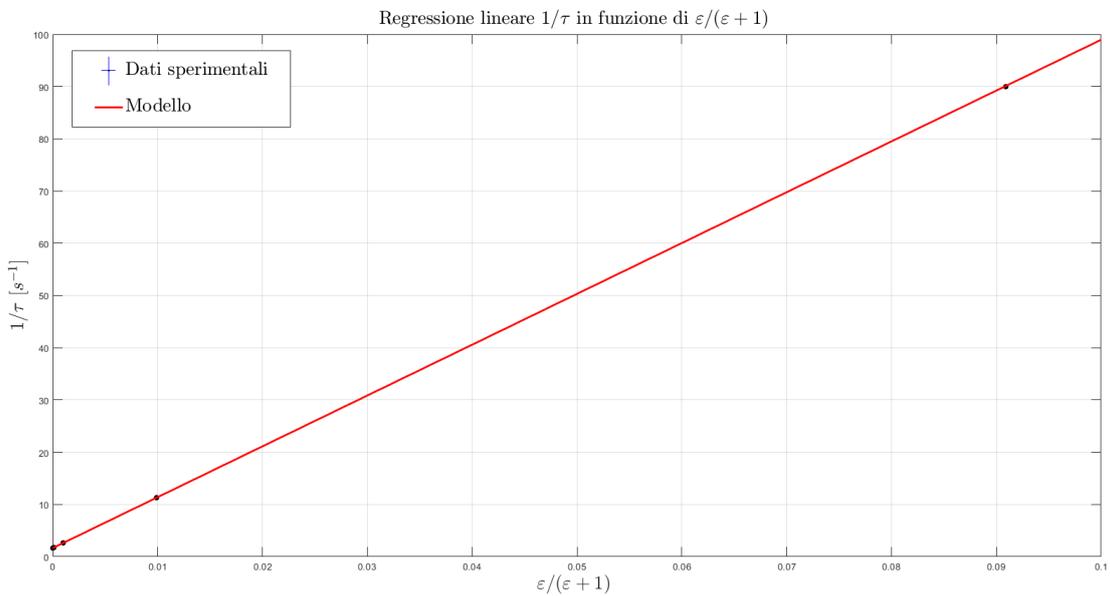


**Figure 8:** Immagine oscilloscopio configurazione  $\varepsilon = 0.1$ , con relativo modello oscillatore armonico smorzato e modello smorzamento.

frequenza con cui oscilla questo oscillatore armonico smorzato, dipende dal circuito e dagli op-amp utilizzati. Nel nostro caso, dal parametro del fit, abbiamo trovato che la frequenza è  $f = 154.1 \text{ Hz}$ , dalla analisi del circuito (sezione successiva) si scopre che la frequenza tipica di questo circuito dovrebbe essere  $\sim 156 \text{ Hz}$ .

Per comodità chiamiamo  $\varepsilon = R_2/R_1$  il rapporto tra queste due resistenze. Abbiamo successivamente fatto i fit anche per altre configurazioni di resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , scegliendo di usare  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ . Dai fit ci siamo poi trovati i rispettivi parametri  $\tau$ , cioè i tempi tipici di smorzamento.

Andiamo ora a rappresentare su un grafico l'inverso dei tempi tipici trovati, in funzione di  $\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ . L'andamento di questi punti appare lineare, dunque abbiamo fatto una regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati. I parametri della retta sono stati chiamati  $y = mx + q$ , e dal fit risultano essere  $m = (982.8 \pm 0.6) \text{ s}^{-1}$  e  $q = (1.662 \pm 0.003) \text{ s}^{-1}$ , con un  $\chi^2$  relativo di  $\chi_r^2 = 6.29$ . Di seguito è riportato il grafico.



**Figure 9:** Regressione lineare dati  $1/\tau_s$  in funzione di  $\varepsilon/(\varepsilon + 1)$ .

Dal punto di vista della teoria del circuito, si può trovare che l'andamento di questi punti sperimentali, che risulta lineare sperimentalmente, è effettivamente lineare. Per trovare ciò bisogna andare a considerare l'equazione differenziale che governa il circuito, che è chiaramente l'equazione di un oscillatore armonico smorzato. Questa si può trovare anti-trasformando (Laplace) l'equazione (5) moltiplicata per un segnale  $\tilde{x}(s)$ . Dopo alcuni passaggi algebrici possiamo scriverla come:

$$s^2 \tilde{x} + \frac{2}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tilde{x} + \omega_0^2 \tilde{x} = 0 \quad (9)$$

dove qui  $\tau = RC$ , e  $\omega_0 = 1/\tau$ . Ora si può anti-trasformare l'equazione per ottenere l'equazione differenziale:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10)$$

Come ci si aspettava, abbiamo ottenuto l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato, della forma

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (11)$$

la cui soluzione analitica è data da

$$x(t) = A \cos(\omega_s t + \varphi) e^{-\frac{\mu}{2}t} \quad (12)$$

dove  $\omega_s = \sqrt{\omega_n^2 - 1/4\mu^2}$ , e per avere l'andamento che vogliamo è richiesto tra l'altro che sia verificata la condizione  $\omega_s < \omega_n$ . Nel nostro caso

$$\mu = \frac{2}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \omega_n = \omega_0 \quad (13)$$

Guardando la soluzione analitica, il termine che a noi interessa è quello che compare nell'esponenziale, infatti nel caso dei fit fatti in precedenza, è nell'esponenziale che si trovava il tempo tipico di smorzamento  $1/\tau_s$ . Quindi la soluzione al nostro problema si ottiene uguagliando gli esponenziali che troviamo nella soluzione analitica dell'oscillatore armonico smorzato (12), e l'esponenziale del fit fatto in precedenza (8), in altre parole vogliamo che  $1/\tau_s = \mu/2$ . Da questa uguaglianza, ricordando che  $\varepsilon = R_2/R_1$ , si trova che:

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\tau} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \quad (14)$$

che è la relazione che stavamo cercando. Se è valida questa scrittura significa che il coefficiente angolare della regressione lineare fatta in precedenza deve essere compatibile con  $1/\tau$ . Abbiamo utilizzato valori di  $C = (10.2 \pm 0.2) \text{ nF}$  e  $R = (99.82 \pm 0.01) \text{ k}\Omega$ , abbiamo mediato e alla fine abbiamo trovato che  $1/\tau = (982 \pm 19) \text{ s}^{-1}$ , compatibile con il valore ottenuto dal fit entro la sua incertezza. Dalla regressione lineare sui dati sperimentali, si osserva una intercetta che non è compatibile con zero, come ci si aspetterebbe vedendo la relazione sopra (14). Quando  $\varepsilon = 0$  significa che  $R_2 \rightarrow 0$  o  $R_1 \rightarrow \infty$ , quindi si potrebbe ottenere il tempo di smorzamento del circuito precedente, andando a porre a massa l'ingresso invertente del op-amp amplificatore e eliminiamo il cavo che connette l'uscita del primo integratore con l'ingresso invertente dell'amplificatore. Il fatto che troviamo un intercetta diversa da zero, è dovuta al fatto che in tutta l'analisi fatta, abbiamo considerato sempre gli op-amp come ideali, quindi con impedenza di entrata infinita e quella in uscita nulla. In realtà gli op-amp si comportano come dei filtri passa-basso, quindi se il problema sopra fosse affrontato tenendo conto di ciò, si spiegherebbe anche quell'intercetta diversa da zero.

## 2.2 Oscillatore armonico con compensazione dello smorzamento

Introduciamo il ramo di compensazione dello smorzamento come illustrato in figura (2). A questo punto il circuito, dopo un transiente iniziale, riproduce il seguente output (Fig.10) nei punti  $V_1$  e  $V_2$ , , anche senza doverlo eccitare. Dopo aver effettuato due fit sinusoidali

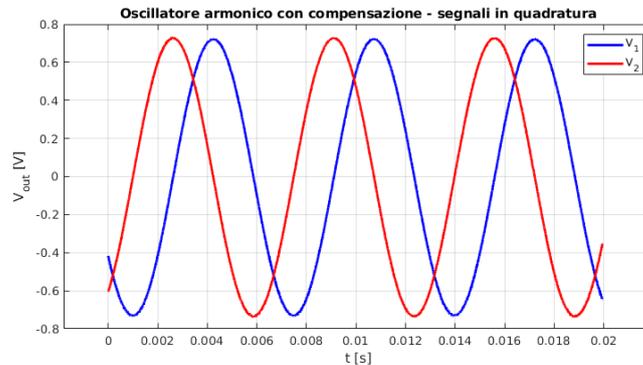
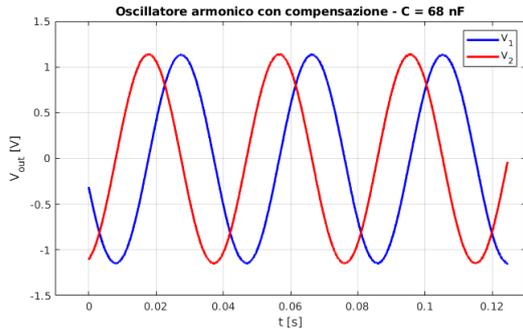


Figure 10: Segnali in quadratura, per l'oscillatore con  $C = 68 \text{ nF}$ .

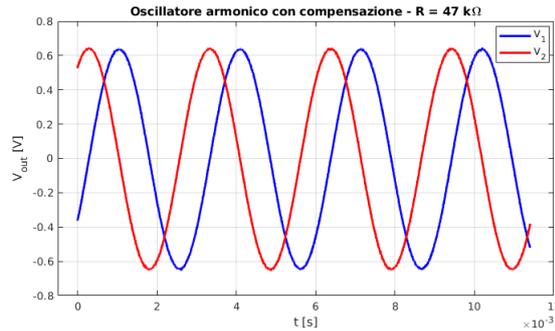
a questi segnali, otteniamo tra essi una differenza di fase di  $90.1^\circ$ , come ci aspettiamo per sinusoidi in quadratura. La frequenza di oscillazione trovata attraverso il fit è per entrambi  $(154.1 \pm 0.1)$  Hz. Questo valore risulta in accordo con quanto aspettato teoricamente (anche grazie alle grandi incertezze sui valori di C), infatti la frequenza di oscillazione avviene nel momento in cui ogni integratore ha guadagno unitario:

$$f_{teo} = \frac{1}{2\pi RC} = (156 \pm 5) \text{ Hz}$$

Provando a sostituire prima entrambi i condensatori e poi le resistenze R, otteniamo la coppia di output seguente (Fig.11 e 12).



**Figure 11:** Segnali in quadratura, per l'oscillatore con  $C = 68$  nF.

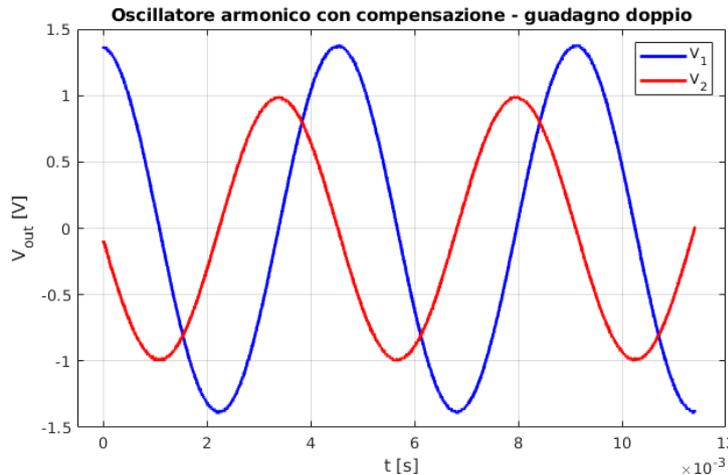


**Figure 12:** Segnali in quadratura, per l'oscillatore con  $R = 47$  kΩ.

Vediamo che in entrambi i casi i sinusoidi in uscita sono in quadratura come testimoniato ancora una volta dalla fase calcolata da un fit sinusoidale. Quello che cambia rispetto al caso precedente è la frequenza e l'ampiezza d'oscillazione. Per il caso con  $C = 68$  nF nominali abbiamo come frequenza sperimentale  $f = (25.7 \pm 0.1)$  Hz, mentre quando abbiamo utilizzato  $R = 47$  kΩ il risultato sperimentale è stato  $f = (327.9 \pm 0.1)$  Hz. Di nuovo, i valori sperimentali sono in accordo entro una deviazione standard con quelli teorici valendo

$$f_{teo}^C = (23 \pm 3) \text{ Hz}; \quad f_{teo}^R = (323 \pm 6) \text{ Hz}$$

Nell'ultimo caso (Fig.13) abbiamo alterato il guadagno dell'amplificatore invertente rendendolo doppio. Quello che notiamo ora è che sebbene i due segnali siano ancora in



**Figure 13:** Segnali in quadratura, per l'oscillatore con guadagno doppio.

quadratura  $V_1$  ha un'ampiezza maggiore di  $V_2$ , infatti introduciamo un'asimmetria per cui

il segnale prima dell'op-amp usato come amplificatore ha ampiezza minore di quello dopo. L'ampiezza non è esattamente doppia in quanto c'è caduta di potenziale sulla resistenza del primo integratore. Tutto sommato vediamo però che, a parità dei valori di  $C$ , entrambi i segnali hanno ampiezza maggiore rispetto ai casi precedenti dove l'ampiezza del circuito era limitata dalla tensione ai capi dei diodi ( $\approx 0.6$  V).

La frequenza sperimentale invece per questi segnali risulta  $f = (218.1 \pm 0.1)$  Hz. Per calcolare quella aspettata teoricamente dobbiamo tornare all'equazione (2), prima che assumessimo  $R_a = R_b$ . Ora, essendo  $R_b = 2R_a$ , nella formula (3) del guadagno, otteniamo che il  $\tau$  del circuito è diminuito di un fattore  $1/\sqrt{2}$  rispetto al caso precedente. Vediamo quindi la compatibilità con la frequenza teorica entro una deviazione standard:

$$f_{teo}^{dop} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi RC} = (214 \pm 5) \text{ Hz.}$$

Come nota finale osserviamo che se sostituissimo gli integratori con dei derivatori il circuito che otterremmo non sarebbe equivalente a quello utilizzato. Non riusciremmo ad avere un oscillatore perché il guadagno del derivatore è  $-sRC$  e con un guadagno del genere il rumore ad alta frequenza verrebbe amplificato a tal punto da portare in saturazione gli operazionali.