



Esercitazione 07: Sorgente di corrente di Howland e ponte di Wien

Brognoli Roberto, Garbi Luca, Libardi Gabriele

Issue: 1

Date: September 11, 2020

University of Trento
Department of Physics
Via Sommarive 14, 38123
Povo (TN), Italy

Introduzione

L'obiettivo di questa esperienza è quello di realizzare e studiare due circuiti che implementano oscillatori; nello specifico, un oscillatore a ponte di Wien ed un oscillatore a rilassamento. Nella prima parte dell'esercitazione viene implementata una sorgente di corrente al fine di misurare la caratteristica I-V di una lampadina. Questo elemento circuitale svolge un ruolo fondamentale nell'oscillatore a ponte di Wien.

1 Setup

1.1 Materiali

- Generatore di funzione d'onda *Rigol DG1022* (impedenza nominale in uscita $R_s = 50 \Omega$);
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi coassiali BNC-banana e BNC-BNC;
- resistori e capacitori vari;
- 1 Op-Amp uA741, 1 lampadina.

1.2 Procedure di misura

Gli Op-Amp vengono alimentati da una tensione di ± 12 V ai rispettivi pin e la corrente in ciascun ramo viene limitata a 60 mA. Viene costruito inizialmente la sorgente di corrente illustrata in figura (1) dove le resistenze R dovrebbero valere tutte 100Ω . I valori misurati col DMM sono, partendo da in alto a sinistra: $(99.2 \pm 0.2) \Omega$, $(98.8 \pm 0.2) \Omega$, $(99.0 \pm 0.2) \Omega$, $(99.1 \pm 0.2) \Omega$. L'Op-Amp utilizzato è del tipo uA741; in entrata viene fornita

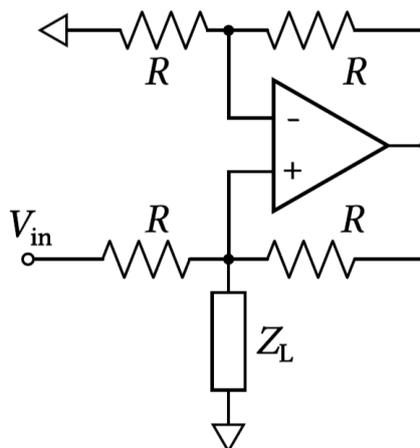


Figure 1: Sorgente di corrente Howland.

al circuito un'onda triangolare V_{in} di ampiezza picco-picco 1.5 V e di frequenza 0.01Hz. Si acquisisce quindi una schermata dell'oscilloscopio riportante il segnale in entrata e la

tensione V_+ .

Nella seconda parte viene implementato un oscillatore a ponte di Wien mediante il circuito seguente. Acquisiamo l'output di questo circuito salvando una schermata dell'oscilloscopio.

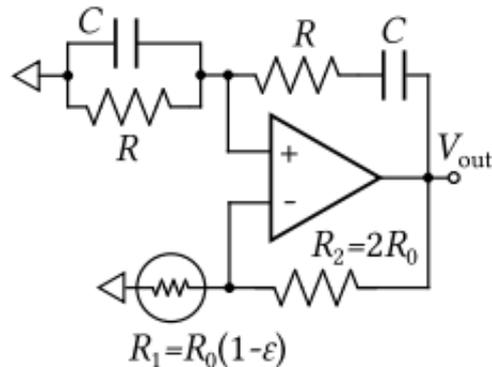


Figure 2: Oscillatore a ponte di Wien.

I valori di R , C e R_2 sono riportati nella sezione di analisi dei dati.

Nell'ultima parte viene allestito il circuito seguente e vengono acquisite schermate del segnale in uscita con l'oscilloscopio per diversi valori di R_1 ed R_2 che vengono riportati nella sezione successiva.

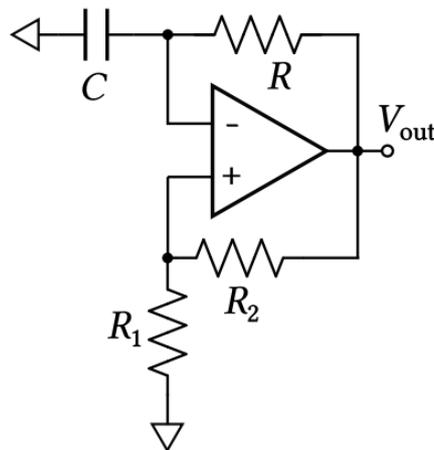


Figure 3: Oscillatore a rilassamento con comparatore.

2 Descrizione e discussione dei risultati

L'analisi dei dati è suddivisa in tre sotto sezioni: nella prima si caratterizza una lampadina determinando la sua curva I-V attraverso una sorgente di corrente di Howland, nella seconda si costruisce un oscillatore a ponte di Wien, mentre nell'ultima viene implementato un oscillatore a rilassamento utilizzando come comparatore un op-amp.

Non viene riportata una sezione per la conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

2.1 Sorgente di corrente di Howland

Vogliamo ricavare l'espressione della corrente che il circuito fornisce al carico Z_L . In prima approssimazione possiamo assumere $V_+ = V_- = V_{out}/2$, da cui $V_{out} = 2V_+$. Usiamo quindi

Millman per ricavare V_+ :

$$V_+ = \frac{\frac{V_{in} + V_{out}}{R}}{\frac{2}{R} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{V_{in} + 2V_+}{2 + \frac{R}{Z_L}}. \quad (1)$$

Da questa si ricava

$$V_+ = \frac{V_{in}}{R} Z_L. \quad (2)$$

dove il rapporto V_{in}/R è l'intensità di corrente I sul carico. Graficandola in funzione di V_+ si nota che la relazione che li lega non è lineare; infatti l'impedenza Z_L cambia a seconda della differenza di potenziale a cui è sottoposta. Per fittare la curva utilizziamo la funzione

$$I = \frac{V_+}{R_L(1 + \alpha V_+^2)} \quad (3)$$

dove α è un coefficiente tipico del carico che verrà determinato dal fit. La relazione precedente può essere giustificata a partire dalla dipendenza della resistività dalla temperatura:

$$\rho = \rho_{20^\circ C}(1 + a(t - 20^\circ C)).$$

Siccome la temperatura varia a causa dell'effetto Joule, possiamo legarla alla potenza dissipata dalla resistenza, quindi al quadrato della differenza di potenziale. Riportiamo in figura (4) i dati sperimentali con il fit dato da (3) mentre in figura (5) viene mostrato il grafico dei residui. Dal fit otteniamo $R_L = (39.5 \pm 0.1) \Omega$ e $\alpha = 3.9 \pm 0.1 \text{ V}^{-2}$.

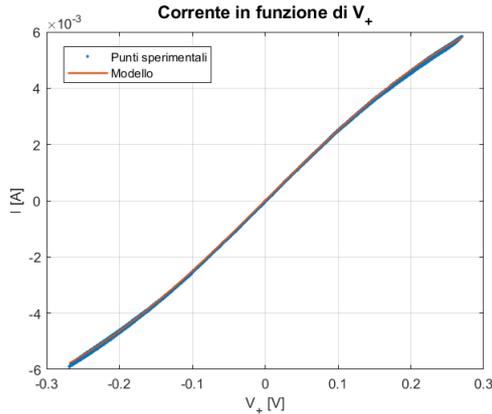


Figure 4: Dati sperimentali con modello.

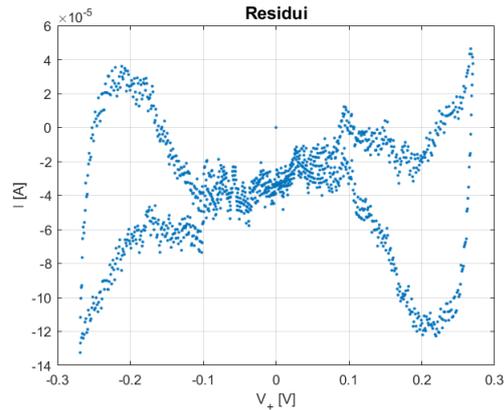


Figure 5: Residui.

2.2 Oscillatore a ponte di Wien

Consideriamo il circuito in figura (2). Chiamiamo il parallelo Z_p tra le impedenze del condensatore C e della resistenza R , mentre Z_s la serie delle due.

$$Z_p = \left(\frac{1}{R} + sC \right)^{-1} \quad Z_s = \left(R + \frac{1}{sC} \right)$$

Come si è verificato nella sezione precedente, notando che la curva I-V della lampadina è pressoché lineare, assumiamo $|\varepsilon| \ll 1$. Andiamo ora a studiare la stabilità del circuito. Sfruttando il teorema di Millman andiamo a considerare la tensione ai capi degli ingressi invertenti V_- e non invertente V_+ , ed andiamo a calcolare la loro differenza ΔV , ricordandoci di utilizzare un offset ΔV_0 . Quindi

$$\Delta V = \Delta V_0 + V_{out} \left(\frac{Z_p}{Z_s + Z_p} - \frac{R_0(1 - \varepsilon)}{R_0(1 - \varepsilon) + 2R_0} \right) \quad (4)$$

Sapendo che $V_{out} = A\Delta V$, dove A è il guadagno dell'op-amp, che assumiamo essere della forma:

$$A = \frac{A_0\omega_0}{s + \omega_0} \quad (5)$$

dalla espressione sopra ci isoliamo il ΔV e, dopo un po' di passaggi algebrici, arriviamo a scrivere:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{1 + A \left(\frac{1-\varepsilon}{3-\varepsilon} - \frac{s\tau}{s^2\tau^2 + 3s\tau + 1} \right)} \quad (6)$$

Per determinare l'eventuale stabilità del circuito, andiamo a studiare i poli della relazione appena trovata (G_{CL}), o equivalentemente consideriamo il suo denominatore ($1 + G_{OP}$) e cerchiamo gli zeri. Dopo alcuni passaggi algebrici e sfruttando la sostituzione $\delta = \varepsilon/(1-\varepsilon)$, in cui $|\varepsilon| \ll 1 \Rightarrow |\delta| \ll 1$ si trova

$$Denominatore(G_{CL}) = 1 + A \frac{1 - \varepsilon}{3 - \varepsilon} \frac{s^2\tau^2 - 2s\tau \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1}{s^2\tau^2 + 3s\tau + 1} \quad (7)$$

$$= 1 + \frac{A}{3 + \delta} \frac{s^2\tau^2 - 2s\tau\delta + 1}{s^2\tau^2 + 3s\tau + 1} \quad (8)$$

$$= 1 + \frac{A_0\omega_0}{3 + 2\delta} \frac{\tau}{s\tau - \omega_0\tau} \frac{s^2\tau^2 - 2s\tau\delta + 1}{s^2\tau^2 + 3s\tau + 1} \quad (9)$$

$$= 1 + A' \frac{1}{z + \nu} \frac{z^2 - 2z\delta + 1}{z^2 + 3z + 1} \quad (10)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le sostituzioni $A' = (A_0\omega_0\tau)/(3 - 2\delta) \gg 1$, nel nostro caso ~ 300 , poi $\nu = \omega_0\tau \ll 1$ e $z = s\tau$. Di questa espressione, consideriamo solo il numeratore, che chiamiamo η :

$$\eta = (z + \nu)(z^2 + 3z + 1) + A'(z^2 - 2z\delta + 1) \quad (11)$$

Dividiamo questa espressione per A' , in modo da ottenere:

$$\frac{\eta}{A'} = \frac{1}{A'}(z + \nu)(z^2 + 3z + 1) + (z^2 - 2z\delta + 1) \simeq (z^2 - 2z\delta + 1) \quad (12)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato il primo termine in quanto $A' \gg 1$. Per la stessa ragione anche $\eta/A' \rightarrow 0$, quindi andiamo a considerare l'equazione di secondo grado:

$$z^2 - 2z\delta + 1 = 0 \quad (13)$$

Ora cerchiamo gli zeri dell'equazione, e troviamo che le radici risultano essere:

$$z_{1,2} = \delta \pm i\sqrt{1 - \delta^2} \quad A' \rightarrow \infty \quad (14)$$

Per la stabilità del circuito cerchiamo radici che stiano nel semipiano reale negativo del piano di Argand - Gauss, da qui dunque si capisce che se $\varepsilon > 0$ abbiamo $\delta > 0$ e dunque il circuito è esplosivo e non stabile, mentre se $\varepsilon < 0$ vale $\delta < 0$ ed otteniamo che il circuito è stabile. Per riassumere, il segno di ε determina o meno la stabilità del circuito. Nel nostro caso, come visto nell'analisi precedente, abbiamo utilizzato un apparato con un $\varepsilon < 0$. Quindi dopo svariati calcoli, che il lettore non avrà sicuramente problemi nel farli, si giunge all'equazione:

$$V_{out} \frac{1 - \varepsilon}{3 - \varepsilon} \left(\tau^2 s^2 - 2\tau s \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + 1 \right) \simeq 0 \quad (15)$$

Infine anti-trasformando l'intera equazione otteniamo l'equazione differenziale seguente;

$$\ddot{V}_{out} - \frac{2}{\tau} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \dot{V}_{out} + \omega_s^2 V_{out} \quad (16)$$

dove $\omega_s = 1/\tau$. L'equazione rappresenta un oscillatore di Van der Pol, e questo si può osservare chiaramente se scriviamo esplicitamente ε in funzione di R_0 e V_{out} , quindi se

$$\varepsilon \simeq -\frac{2\alpha R_L}{9\tau R_0} (V_{out}^2 - V_0^2) \quad (17)$$

dove il significato delle nuove variabili si può trovare nell'analisi precedente. Dopo aver infine sostituito nell'equazione differenziale questa espressione, considerando $x = V_{out}/V_0$ e $\mu = (2\alpha R_L V_0^2)/(9\tau R_0)$ si giunge all'equazione differenziale:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_s x = 0 \quad (18)$$

che è precisamente l'equazione di Van der Pol, che rappresenta l'omonimo oscillatore. Una volta montato il circuito in figura (2), e collegata l'uscita all'oscilloscopio, abbiamo acquisito dei dati, riportati nel grafico (6). Insieme ai dati, nel grafico è riportato un modello sinusoidale dei dati, per misurare l'ampiezza e la frequenza dell'oscillazione, supponendo, in prima approssimazione, che non siano presenti altre armoniche superiori, oppure che queste siano trascurabili rispetto a quella principale. Dai parametri del fit sinusoidale, si

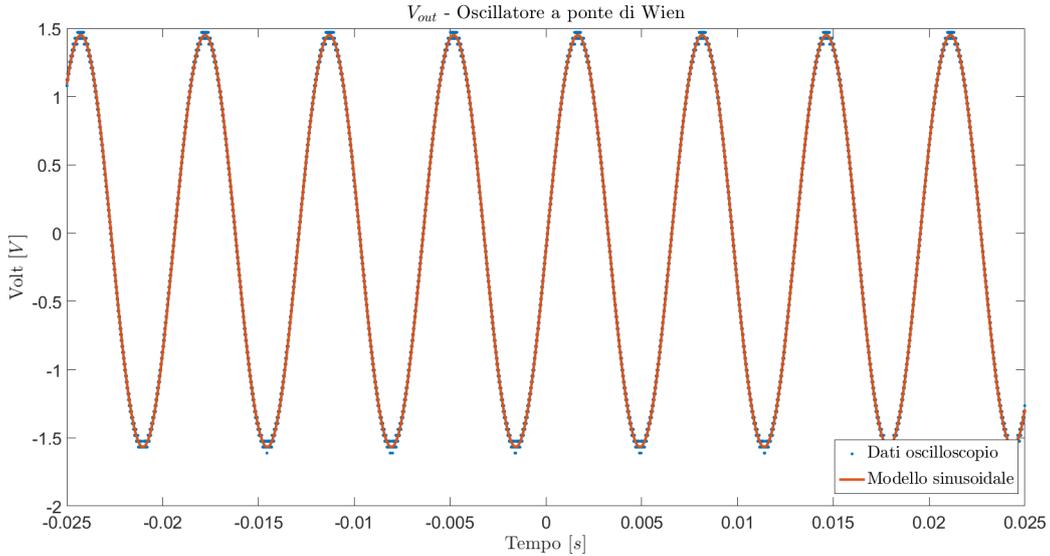


Figure 6: V_{out} e modello sinusoidale, oscillatore a ponte di Wien

trova che la frequenza dell'oscillazione è 154.2 Hz , mentre l'ampiezza vale 1.51 V . Questi valori sono quelli che ci aspettavamo tra l'altro dopo le considerazioni fatte nella analisi precedente. Dall'equazione di Van der Pol si può considerare come soluzione la somma delle armoniche data da

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (19)$$

siccome solo le prime armoniche determinano effettivamente l'andamento dell'oscillazione, abbiamo deciso di considerare solo i primi due termini della serie. Andando a sostituire

gli a_n con dei parametri relativi alla nostra equazione differenziale, si trova che la nostra soluzione approssimata al primo ordine diventa

$$x(t) = 2 \cos(\omega_s t) - \frac{\mu}{4\omega_s} \sin(3\omega_s t) + O(\mu^2) \quad (20)$$

Sostituendo $x = V_{out}/V_0$ otteniamo

$$V_{out}(t) = 6\sqrt{\frac{R_2/2 - R_L}{\alpha R_L}} \cos(\omega_s t) - \frac{\mu V_0}{4\omega_s} \sin(3\omega_s t) + O(\mu^2)$$

Vediamo che il contributo del seno è trascurabile rispetto a quello del coseno, la cui ampiezza vale, a livello teorico, $1.54 \pm 0.02 V$ compatibile con il valore trovato dal fit sinusoidale entro 2 deviazioni standard. La frequenza è data da $f = \omega_s/2\pi = 1/2\pi\tau$. Utilizzando come valori $R = 99.2 \pm 0.2 k\Omega$ e $C = 10.4 \pm 0.2 nF$, otteniamo $f = 154.3 \pm 3.0 Hz$, compatibile con il valore trovato dal fit (in cui abbiamo considerato solo la soluzione al primo ordine).

2.3 Oscillatore a rilassamento

Consideriamo il circuito in figura (3), chiamiamo per comodità $r = R_1/R_2$ e $\beta = R_1/(R_1 + R_2)$. Inizialmente il sistema è in un punto di equilibrio instabile con l'output a tensione nulla. A causa di rumore elettromagnetico o termico l'uscita dell'op-amp diventa diversa da zero, supponiamo che raggiunga una tensione positiva, ma il caso con tensione negativa è analogo. Quello che avviene allora è che, grazie al feedback positivo, V_{out} satura fino a $V_{CC} = 12 V$. Infatti grazie al partitore sul canale non invertente abbiamo una tensione $V_+ = \beta V_{out}$. Nel frattempo tra canale invertente e V_{out} abbiamo un semplice circuito RC serie. V_- allora avrà un andamento esponenziale nel tempo, con $\tau = RC$, che si avvicina asintoticamente a V_{out} . Nel momento in cui però la tensione sul canale invertente è maggiore di quella sul non invertente, il feedback positivo porta l'uscita dell'operazionale a $V_{EE} = -V_{CC} = -12 V$. A questo punto abbiamo di nuovo un andamento esponenziale per V_- che si avvicina asintoticamente a V_{EE} , e rinizia il ciclo non appena $V_+ > V_-$. Possiamo scrivere la tensione ai capi del condensatore come

$$V_- = V_{CC} + (V_{init} - V_{CC}) \exp(-t/RC)$$

dove V_{init} è la tensione sul canale invertente nel momento in cui inizia la carica/scarica. Nella figura seguente (Fig.7) possiamo vedere i segnali sul canale in uscita e sull'ingresso invertente per un oscillatore con $r = 1$ ($\beta = 1/2$) e $C = 100 nF$, $R = 100 k\Omega$ nominali. Vediamo che i segnali ottenuti corrispondono ad un'onda quadra e ad una carica e scarica esponenziale come previsto. Notiamo che l'oscillatore costruito ha una frequenza di $(42 \pm 1) Hz$. Per calcolarci il periodo di oscillazione teorico partiamo dall'espressione della tensione ai capi del condensatore. Prendiamo $t = 0$ nel momento in cui avviene l'inversione di polarità a $V_- = V_+ = -\beta V_{CC}$, allora dopo metà periodo ($t = T/2$) avremo la successiva inversione di polarità a $+\beta V_{CC}$. In formule

$$V_+ = V_{CC} + (-V_+ - V_{CC}) \exp(-T/2RC)$$

che porta a

$$\exp(-\tau/2RC) = \frac{V_{CC} - V_+}{V_{CC} + V_+}$$

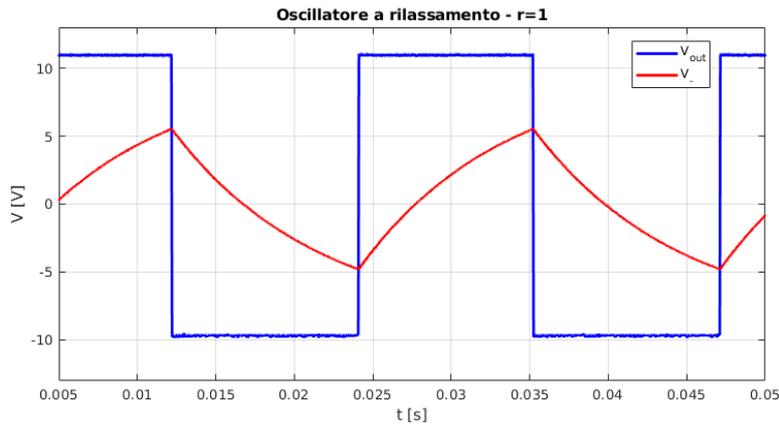


Figure 7: Oscillatore a rilassamento con $r = 1$.

e, ricordando che $V_+ = \beta V_{CC}$ ci porta a

$$\exp(-\tau/2RC) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \implies T = 2RC \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$$

Nel caso $r = 1$ allora la frequenza di oscillazione teorica vale

$$f = 1/(2RC \log 3) = (46 \pm 4) \text{ Hz}$$

valore che risulta compatibile con i dati sperimentali entro una deviazione standard.

Di seguito (Fig.8 e 9) sono riportati i segnali in uscita dall'operazionale per $r = 0.1$ e $r = 10$. In quest'ultimo caso anziché riportare l'ingresso invertente è stato riportato V_+ .

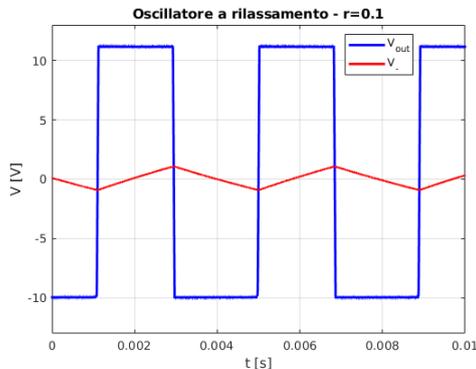


Figure 8: Oscillatore a rilassamento con $r = 0.1$.

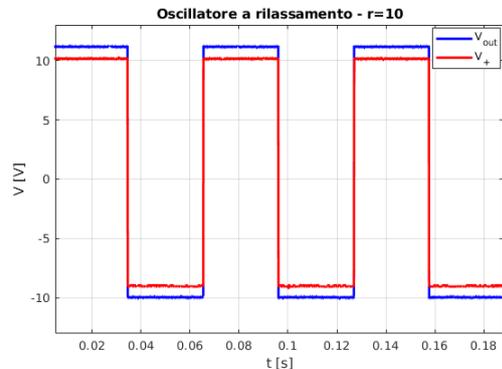


Figure 9: Oscillatore a rilassamento con $r = 10$.

Questo poiché una misura di V_- non risultava possibile se non alterando molto il segnale sul canale invertente a causa dell'impedenza non trascurabile dell'oscilloscopio. Le frequenze sperimentali per questi due oscillatori sono

$$f_{0.1}^{exp} = (241 \pm 1) \text{ Hz} ; \quad f_{10}^{exp} = (16 \pm 1) \text{ Hz}$$

Per i valori teorici, ricordando che per $r = 0.1$ si ha $\beta = r/(r + 1) = 0.0909$ e con $r = 10$ vale $\beta = 0.9091$, otteniamo

$$f_{0.1}^{teo} = (261 \pm 9) \text{ Hz} ; \quad f_{10}^{teo} = (16 \pm 1) \text{ Hz}$$

Per $r = 10$ la compatibilità tra i due dati è garantita ancora entro una deviazione standard, per $r = 0.1$ invece il dato teorico si discosta di più di due deviazioni standard da

quello sperimentale, nonostante le grandi incertezze su C che si propagano sulla stima di frequenza. Questo fatto è imputabile alla non idealità dell'operazionale, che in questo caso si manifesta in maniera più marcata ad alte frequenze. Possiamo visualizzare meglio questo effetto nella figura seguente (Fig.10), in cui sono rappresentati i segnali sui due ingressi e in uscita ad un oscillatore a rilassamento con $r = 1$, $R = 10 \text{ k}\Omega$ e $C = 10 \text{ nF}$. La

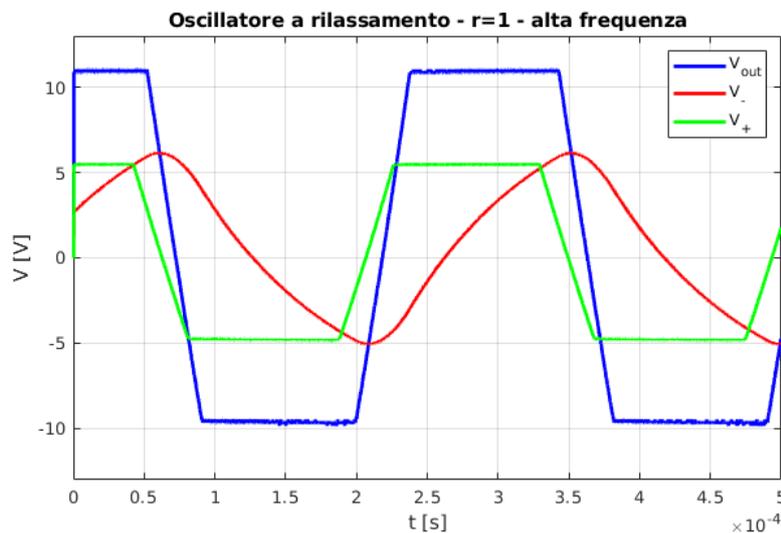


Figure 10: Oscillatore a rilassamento con $r = 1$, $R = 10 \text{ k}\Omega$ e $C = 10 \text{ nF}$.

frequenza che ci aspettiamo abbia questo oscillatore è 4.55 kHz, ma quello che troviamo sperimentalmente non è quanto predetto dalla teoria. Infatti l'assunzione che il cambio da saturazione positiva a negativa dell'operazionale sia istantanea non è più valida a frequenze alte e vediamo che la transizione richiede un tempo dello stesso ordine di grandezza di quello del *duty-cycle* aspettato. Come nota finale vediamo che in tutti i grafici è presente un'asimmetria nel voltaggio massimo e minimo che dovrebbe essere $\pm V_{CC}$. Questo effetto è dovuto a sua volta ad un'asimmetria interna dell'operazionale, fatto confermato sperimentalmente quando abbiamo notato che l'asimmetria non era presente usando un altro op-amp.