

# Prima esperienza di laboratorio - Relazione

**Gruppo L12**

Dal Farra Filippo, Garbi Luca, Libardi Gabriele

23 Marzo 2018

# Contents

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lunghezza cilindretti</b>	<b>4</b>
2.1	Materiali . . . . .	4
2.2	Procedure di misura . . . . .	4
2.3	Analisi dei dati . . . . .	5
2.4	Conclusioni . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Periodo di oscillazione del pendolo</b>	<b>15</b>
3.1	Materiali . . . . .	15
3.2	Procedure di misura . . . . .	15
3.3	Analisi dei dati . . . . .	16
3.4	Conclusioni . . . . .	23

## 1 Abstract

Il principale obiettivo di questa prima esperienza di laboratorio è quello di iniziare ad interfacciarsi con la valutazione delle incertezze di risoluzione e di tipo "A" e "B", a seguito di misurazioni di grandezze fisiche. Durante le sessioni in laboratorio sono stati realizzati due differenti set di misure. Il primo set riguarda la misurazione della lunghezza di una popolazione di cilindretti d'acciaio e il secondo set di misurazioni riguarda il periodo di oscillazione di un pendolo.

A partire da queste esperienze è seguita un'analisi dei dati che ha portato ad un confronto con errori di tipo "A", "B" e di risoluzione. Questa parte è stata maggiormente approfondita anche grazie al confronto con i dati raccolti dagli altri gruppi e attraverso l'utilizzo di istogrammi.

Tra i risultati, quello più evidente è una sensibile differenza, sia tra le misure di operatori diversi (con lo stesso strumento di misura), sia tra quelle del medesimo operatore che non varia la procedura di misurazione.

## 2 Lunghezza cilindretti

### 2.1 Materiali

- Metro a nastro
- Calibro ventesimale
- Micrometro centesimale
- N° 25 cilindretti
- Supporto plastico forato reggi-cilindretti

### 2.2 Procedure di misura

La popolazione di cilindretti che ci accingiamo a misurare è composta da un totale di 25 individui, di cui 5 con sezione maggiore degli altri 20 (più sottili).

Procediamo alla calibrazione e controllo degli strumenti, chiudendo completamente il calibro e il micrometro e controllando che diano come valore 0 *mm*.

A questo punto ogni operatore misura lo stesso cilindretto prima con il metro a nastro, poi con il calibro ed infine con il micrometro. Durante la misura con calibro e micrometro ci aiutiamo con il supporto forato in modo che tenga fermi i cilindretti e che non permetta al calore delle mani di compromettere le misurazioni.

Proseguiamo così per la misura di tutti e 25 i campioni. Inoltre, per ulteriore scrupolo, una volta effettuata una prima misura di tutti i cilindretti, 3 campioni vengono ri-misurati da ogni operatore con i 3 strumenti in modo che si possa poi confrontare la prima con la seconda misura.

Creiamo un foglio di calcolo in cui annotiamo tutte le misure prese, compreso il tipo di cilindretto (grosso o fino).

In seguito, in fase di analisi, aggiungiamo ai nostri dati anche quelli presi da altri 14 gruppi che hanno effettuato misure sulle loro popolazioni di 25 individui.

### 2.3 Analisi dei dati

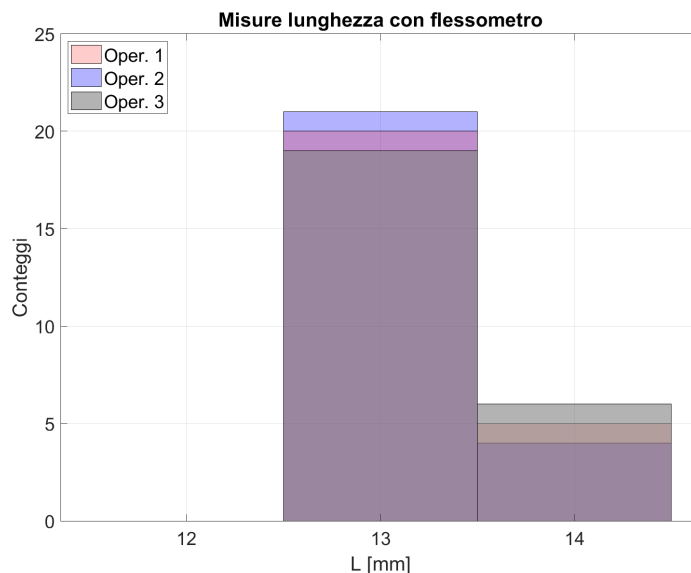
In questa analisi dei dati verrà trattato per primo il set di misure del solo nostro gruppo, con il confronto tra le misure dei 3 operatori, e successivamente verranno analizzati i dati complessivi dei 15 gruppi. Avendo un set di dati differente per ogni operatore, nel momento del calcolo dei parametri d'errore e statistici, è stato utilizzato il set dell'operatore con caratteristiche intermedie rispetto agli altri due. La fonte principale di incertezza sulla misura delle lunghezze dei campioni è l'incertezza di risoluzione dei vari strumenti. Una prima stima è quella dell'intervallo di incertezza massima dato da  $\delta X = \Delta X/2$  con  $\Delta X$  risoluzione dello strumento.

Nel nostro caso:

- Per il flessometro  $\Delta X_{fl} = 1 \text{ mm}$
- Per il calibro  $\Delta X_{ca} = 0.05 \text{ mm}$
- Per il micrometro  $\Delta X_{mi} = 0.01 \text{ mm}$

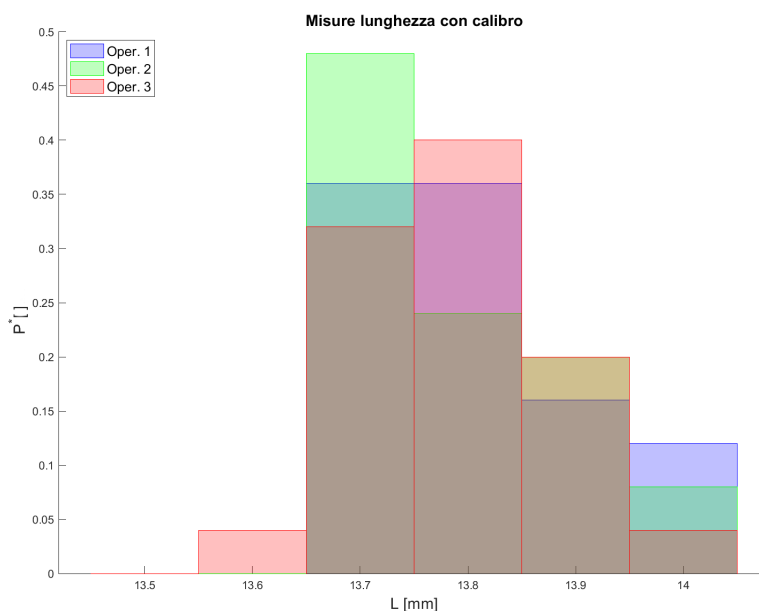
Troviamo un aiuto importante per studiare la nostra popolazione di campioni negli istogrammi.

L'istogramma di seguito raffigura le misurazioni effettuate con il flessometro sui nostri 25 campioni. Data la bassa risoluzione dello strumento la moda dell'istogramma è molto superiore alla coda, infatti le differenze di lunghezze che con gli altri due strumenti sono ben visibili, con il metro a nastro non sono apprezzabili. Ad ogni modo, è utile per un confronto con gli altri strumenti trovare il valor medio campionario e la deviazione standard campionaria di queste misurazioni. Abbiamo quindi come media  $m^*[x_{fl}] = 13.20 \text{ mm}$  e come scarto tipo campionario  $\sigma^*[x_{fl}] = 0.40 \text{ mm}$ .



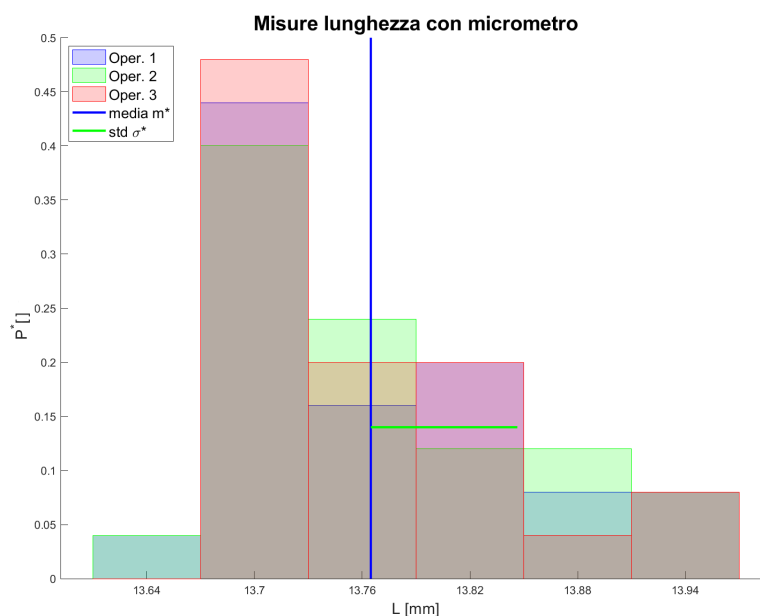
Si nota inoltre che all'interno del gruppo ci sono differenze sulla misurazione di due campioni. Nonostante la bassa risoluzione del flessometro infatti, sono stati riscontrati errori casuali maggiori di  $\Delta X_{fl}/2$ . Questi errori di tipo "A" sono probabilmente da imputare ad una differente procedura di misura dei campioni da parte degli operatori: poiché il supporto forato porta-cilindretti era di impedimento per una corretta stima della lunghezza, la misura è stata effettuata tenendo i campioni in mano.

Questo istogramma invece inizia a dare informazioni ben più precise del precedente, fatto dovuto alla risoluzione del calibro di 20 volte maggiore rispetto a quella del flessometro. Si nota subito che la frequenza campionaria  $p_j^*$  raggiunge i suoi massimi nei bins centrati nei valori di 13.7 mm e 13.8 mm, inoltre la media campionaria è  $m^*[x_{ca}] = 13.77 \text{ mm}$  con una deviazione standard campionaria  $\sigma^*[x_{ca}] = 0.09 \text{ mm}$  (e una varianza relativa ai campioni  $D^*[x_{ca}] = 0.01 \text{ mm}^2$ ).



Questo dati sono in forte disaccordo con le misurazioni del flessometro che aveva infatti come media  $m^*[x_{fl}] = 13.20 \text{ mm}$  e intervallo di incertezza massimo  $\Delta X_{fl}/2 = 0.5 \text{ mm}$ . Per questo è stato effettuato un controllo sull'integrità del metro a nastro in nostro possesso che, dopo un confronto con quello di altri due gruppi e con il nostro calibro, abbiamo appurato essere scalibrato di circa mezzo millimetro.

Nell'istogramma seguente, oltre che alla frequenza campionaria in funzione della lunghezza, sono state inserite anche una barra verticale in corrispondenza della media campionaria e una barra orizzontale di ampiezza pari a  $\sigma^*[x_{mi}] = 0.08 \text{ mm}$ . È da notare come lo scarto del micrometro differisca di poco rispetto a quello del calibro, nonostante la risoluzione di quest'ultimo sia di 5 volte inferiore a quella del Palmer.



Questo, unito alla forte somiglianza dei due grafici dei due strumenti ed al fatto che la media campionaria del micrometro sia  $m^*[x_{mi}] = 13.76 \text{ mm}$ , cioè di un solo centesimo di millimetro differente rispetto a quella del calibro, ci fanno fare due osservazioni. La prima è che questi dati ci danno un'ulteriore conferma della giusta calibratura di Palmer e calibro contro quella del metro a nastro. La seconda, forse più importante, è che con buona probabilità non ci sono stati altri errori sistematici oltre a quello relativo al metro a nastro, o meglio se ci sono stati i casi sono due: la loro entità è stata minore

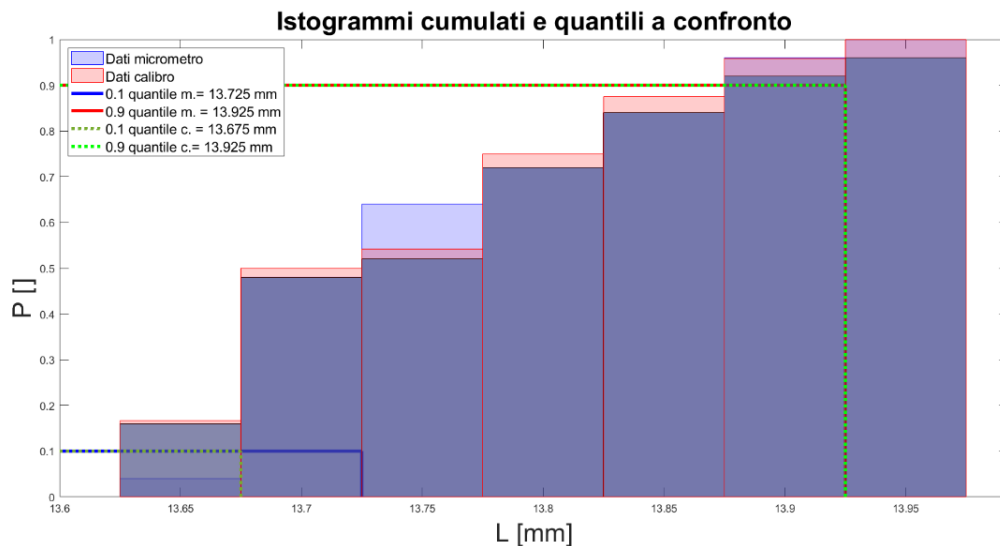


della risoluzione dei nostri strumenti, oppure l'errore di tipo "B" era presente sia nella misurazione con calibro che con micrometro.

Notiamo inoltre che tutti i 5 cilindretti grossi che erano in nostro possesso hanno lunghezza inferiore alla  $m^*[x_{mi}]$ , la loro media è infatti  $13.70 \text{ mm}$ .

Nell'istogramma seguente sono stati sovrapposti, una volta normalizzati in altezza, due istogrammi cumulati relativi ai dati raccolti con il micrometro e a quelli raccolti con il calibro da un solo operatore. Anche in questo caso si nota che gli istogrammi sono sovrapponibili quasi nella loro totalità. Altri fattori che aiutano ad avvalorare la tesi che la distribuzione dei valori raccolta sia quella propria dei cilindretti, a meno degli errori precedentemente determinati, sono la mediana e i quantili.

Nel grafico sottostante sono stati rappresentati due decili per ogni set di misure: quello relativo al 10% e quello relativo al 90%. Si nota la corrispondenza di micrometro e calibro rispetto al quantile del 90%, mentre per il decile al 10% troviamo due valori differenti. Infatti il 10% degli individui misurati con il calibro ha una lunghezza minore o uguale a  $13.65 \text{ mm}$ , mentre per il micrometro il dato è  $13.72 \text{ mm}$ . Considerando però che l'errore di risoluzione del calibro è  $\Delta X_{ca} = 0.05 \text{ mm}$  la differenza non è così marcata.



Le mediane dei due set di dati invece coincidono solamente a meno dell'incertezza di risoluzione del calibro, i valori infatti sono  $13.75 \text{ mm}$  per il calibro e  $13.73 \text{ mm}$  per il Palmer, una differenza di 2 centesimi di millimetro, che in ogni caso non sarebbe stata apprezzabile dal calibro.

Nella tabella seguente sono raccolti i parametri che caratterizzano le misurazioni dei tre operatori: (dati in mm)

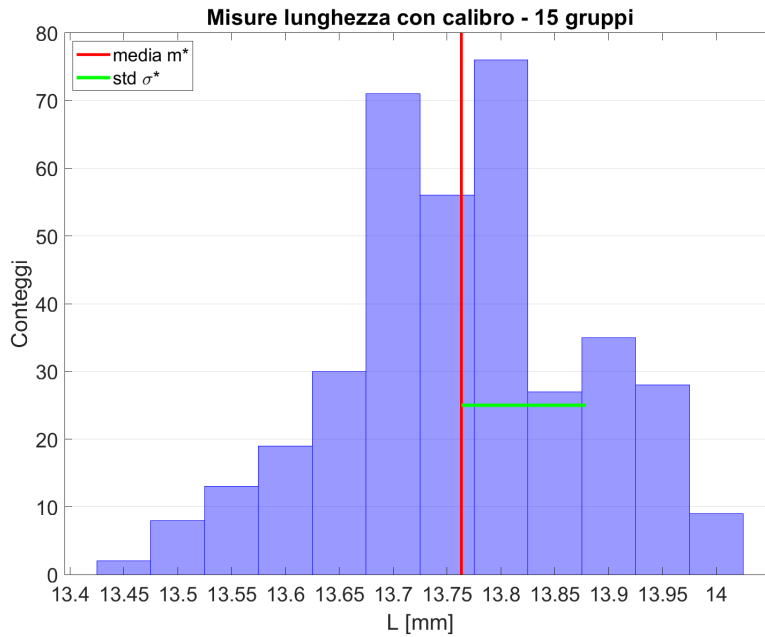
Operatore	$m^*[x_{ca}]$	$\sigma^*[x_{ca}]$	$m^*[x_{mi}]$	$\sigma^*[x_{mi}]$
Oper. 1	13.770	0.098	13.768	0.0792
Oper. 2	13.768	0.082	13.758	0.0802
Oper. 3	13.778	0.094	13.765	0.0799

Dalla tabella si nota come l'operatore 2, con entrambi gli strumenti, tende a fornire misurazioni minori degli altri, questo é dovuto probabilmente ad una procedura di misurazione inconsciamente diversa e soggettiva o ad una tendenza del singolo ad approssimare per eccesso in caso di misurazioni dubbie.

Finita la serie di misurazioni sono stati ripresi tre cilindretti per essere rimisurati, ed analizzando i dati abbiamo concluso che i valori ottenuti dalla ripetizione della misura sono coerenti con i precedenti per ogni operatore.

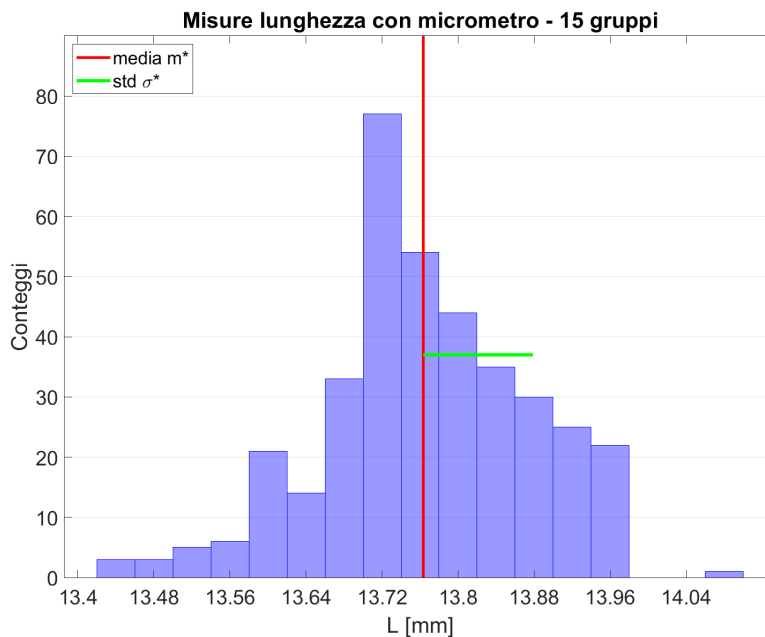
Nella trattazione dei dati totali dei 15 gruppi è stata rimossa la misura di lunghezza di un cilindretto poichè aveva un valore di  $12.8 \text{ mm}$ . Questo valore è molto al di fuori dal range della distribuzione di tutti i cilindretti, con buona probabilità si tratta di un errore triviale di misurazione o di trascrizione dei dati del gruppo che ha effettuato la misura, ma non è certo. Ad ogni modo, il dato è stato omesso poichè anche se non fosse affetto da errori sarebbe trascurabile e non sarebbe foriero di nessuna informazione.

In generale i dati raccolti su un totale di 374 campioni complessivi arricchiscono molto le informazioni che possediamo sulla popolazione di cilindretti complessiva. Di seguito un grafico dei conteggi in funzione della lunghezza misurata.



Abbiamo inoltre evidenziato la media campionaria  $m^*[x_{ca-tot}] = 13.76 \text{ mm}$ , che si avvicina molto ai  $13.77 \text{ mm}$  della media del nostro gruppo. Un altro dato presente nell'istogramma è la deviazione standard campionaria  $\sigma^*[x_{ca-tot}] = 0.12 \text{ mm}$  che varia di 3 centesimi di millimetro rispetto alla nostra sigma, dato più che accettabile se consideriamo che il numero di campioni è aumentato di un fattore 15, aumentando di conseguenza la possibilità che i campioni stessi abbiano una lunghezza che si discosta molto da  $m^*[x_{ca-tot}]$ .

Di seguito invece l'istogramma dei dati di tutti i gruppi con alle misure prese con il Palmer. Ancora una volta sono riconfermate le osservazioni fatte in precedenza sulla similitudine della distribuzione della popolazione dei nostri cilindretti con quella di tutti i gruppi. Anche in questo caso la media infatti è  $m^*[x_{mi-tot}] = 13.76 \text{ mm}$ , identica a  $m^*[x_{ca-tot}]$ . Lo scarto quadratico invece è leggermente minore con  $\sigma^*[x_{mi-tot}] = 0.11 \text{ mm}$ , un centesimo di millimetro in meno rispetto a  $\sigma^*[x_{ca-tot}]$ . È inoltre interessante notare che la mediana dei dati totali sia delle misurazioni prese con il micrometro, che quelle prese con il calibro è  $13.75 \text{ mm}$ , esattamente come quella del nostro gruppo di cilindretti.



## 2.4 Conclusioni

Dall'analisi dei dati si evince che l'utilizzo del metro a nastro per questo tipo di misurazioni non fornisce risultati significativi. Essendo la distribuzione che emerge dai dati misurati con il calibro e con il Palmer molto simile possiamo ragionevolmente supporre di non aver commesso errori sistematici nella misurazione.

Come osservazione conclusiva possiamo affermare che il campione di  $N = 25$  cilindretti del nostro gruppo rispecchia in pieno la distribuzione campionaria della famiglia degli  $N = 374$  cilindretti totali.

## 3 Periodo di oscillazione del pendolo

### 3.1 Materiali

- Filo da lenza inestensibile
- Metro a nastro
- Cronometro centesimale
- Struttura di supporto
- Cilindro metallico

### 3.2 Procedure di misura

Il pendolo viene realizzato appendendo ad un supporto rialzato l'estremità di un filo da lenza, la cui estensibilità per questa esperienza può essere considerata trascurabile. All'altra estremità del filo è stato appeso, con un dado a cupola forato al centro, un cilindro di metallo di altezza  $3.00\text{ cm} \pm 0.03\text{ cm}$  e di raggio  $2.00\text{ cm} \pm 0.03\text{ cm}$ , la massa precisa di tale oggetto non è fondamentale ai fini dell'esperimento. La lunghezza del pendolo calcolata dall'estremità del filo appesa fino al baricentro del cilindro metallico, è di  $55.00\text{ cm} \pm 0.03\text{ cm}$ .

Inizialmente ogni operatore utilizza un cronometro digitale con risoluzione  $0.01\text{ s}$  per effettuare 20 misure del periodo di una sola oscillazione del pendolo. In ogni misura il pendolo è stato fatto partire con un'inclinazione rispetto alla normale di circa  $10^\circ$ , così da poter restare nell'approssimazione di piccoli angoli, a tale scopo è stato posto un riferimento sul piano di lavoro in modo da tenere il più possibile costante il punto di partenza. Inoltre per ogni ripetizione è stato scartato il primo periodo e misurato il secondo in modo da evitare che le misure venissero influenzate dall'operatore che rilascia

la massa.

L'operatore che nel suo set di misurazioni ha ottenuto lo scarto quadratico medio inferiore procede a questo punto con la stessa modalità per ulteriori 100 misurazioni. Infine come ultimi dati è stato cronometrato il periodo di 5 oscillazioni del pendolo per 20 volte.

### 3.3 Analisi dei dati

L'incertezza nella misurazione è dovuta principalmente ai riflessi degli operatori e alla risoluzione dello strumento che è stimata essere  $\Delta X_r = 0.01$  s. Quindi l'intervallo di incertezza massima di risoluzione è dato da  $\delta X_r = \Delta X_r/2$ .

Nel set di misurazioni in cui ognuno ha misurato 20 periodi del pendolo nelle medesime condizioni si sono riscontrati anche errori sistematici. Questi ultimi sono dovuti principalmente alle diversità tra gli operatori, sia a livello fisico per quel che riguarda i riflessi, sia a livello operativo per cui ognuno ha agito diversamente secondo la modalità di misurazione che riteneva più opportuna.

Come primo passo è stata calcolata la media e lo scarto quadratico medio campionario delle 20 misure del periodo delle oscillazioni del pendolo di ogni operatore. Di seguito è riportata una tabella.

Operatore	$m^*$	$\sigma^*$
Oper. 1	1.46 s	0.048 s
Oper. 2	1.44 s	0.061 s
Oper. 3	1.45 s	0.044 s

Già confrontando gli scarti quadratici medi campionari si possono notare incertezze dovute ai diversi misuratori (tipo "B").



Dall'istogramma seguente (Figure 1) si possono capire ancora meglio le differenze tra gli operatori.

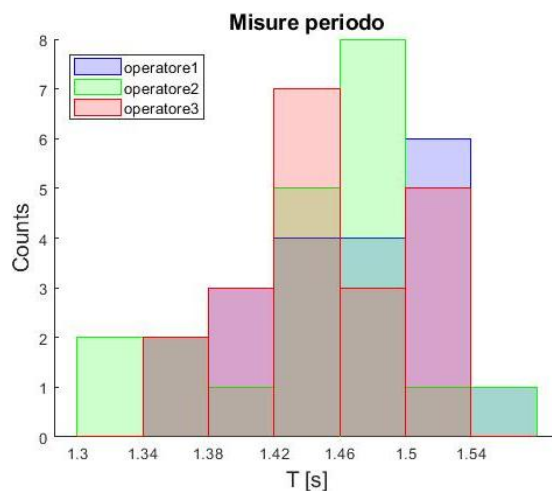


Figure 1: Il grafico è composto da tre diversi istogrammi sovrapposti, ognuno dei quali rappresenta i conteggi delle 20 misure di ogni operatore. l'intervallo dei bins è  $\Delta x_b = 0.04 s$

Nel grafico sottostante (Figure 2) che raffigura i dati di un solo operatore si osservano incertezze, infatti molti dati si discostano dal valore medio. Questi errori sono presumibilmente casuali (tipo "A"), perché dovuti alla non perfetta prontezza dei riflessi dell'operatore e/o a disattenzioni dovute alla ripetitività della procedura di misura. Tutti questi fattori contribuiscono in diversa maniera ad alterare le misure perciò ad aumentare l'incertezza totale.

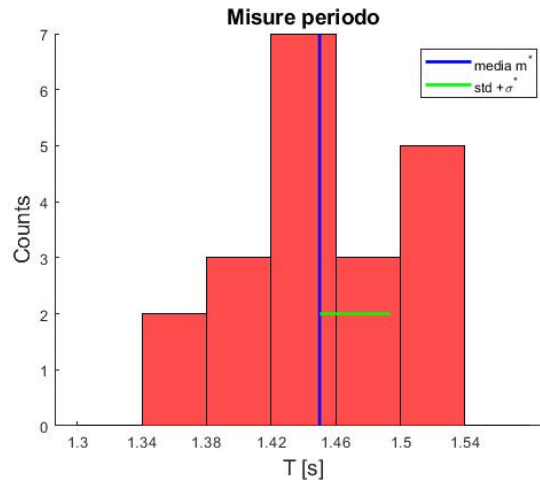


Figure 2: In particolare il seguente istogramma rappresenta i conteggi delle misure dell'operatore 3, il quale ha ottenuto lo scarto quadratico minore. L'intervallo dei bins è  $\Delta x_b = 0.04$  s. In più è rappresentata la media e lo scarto quadratico medio campionario.

Ora prendiamo in esame le 100 misure delle oscillazioni del pendolo (eseguite dall'operatore 3, quello che ha ottenuto la  $\sigma^*$  inferiore nelle 20 misure).

La media campionaria è  $m^*[x_{100}] = 1.50$  s.

Lo scarto quadratico medio campionario è  $\sigma^*[x_{100}] = 0.042$  s.

Si vede dai dati e dal grafico (Figure 3) che per quel che riguarda la media tra i due set di misurazioni c'è una non lieve discrepanza, di circa 0.05 s, maggiore della risoluzione del cronometro. La media campionaria del set dei 100 campioni si avvicina di più alla previsione teorica del periodo del pendolo approssimando la massa ad un punto materiale e il filo privo di massa ( $T = 2\pi\sqrt{l/g} \approx 1.49$  s). Anche lo scarto quadratico medio campionario del set di 100 dati risulta essere minore rispetto al set dei 20 campioni, anche se non

di molto, il che sta ad indicare che gli errori casuali, in proporzione, sono diminuiti. Invece si può notare che l'istogramma dei 100 dati sta iniziando ad assumere una forma a campana, cosa che non è evidente nel grafico dei 20 campioni. Possiamo quindi solo ipotizzare che la distribuzione sia una curva gaussiana.

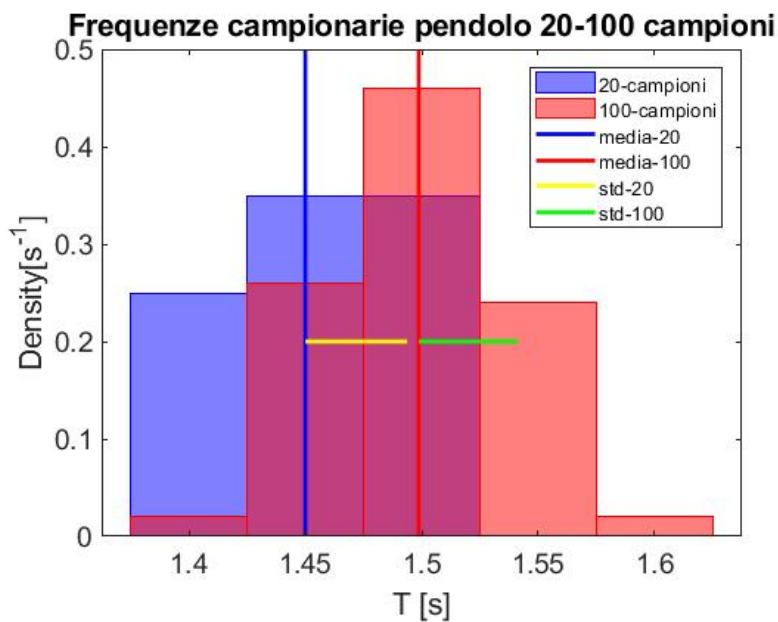


Figure 3: Il seguente istogramma mette a confronto due set di misurazioni, quello con 20 e 100 campioni. I due istogrammi sovrapposti sono stati normalizzati in altezza e per area, in più hanno lo stesso binnaggio  $\Delta x_b = 0.05 s$  in modo da poter essere confrontati. Per visualizzare meglio i dati sono stati inseriti tratti che rappresentano la media campionaria e lo scarto quadratico medio campionario.

Un altro caso interessante è quello rappresentato dalla distribuzione delle medie in  $M = 10$  sottogruppi formati da 10 misure. Questo ci permetterà di capire come si dispongono le medie dei vari sottogruppi. Per ogni sottogruppo di 10 misure è stata calcolata la media campionaria  $m_k^*[T]$  e lo scarto quadratico medio campionario  $\sigma_k^*[T]$  con  $k = 1, \dots, M$ .

Il valore medio campionario dei valori medi  $m^*[m_k^*[T]]$  è uguale alla media campionaria totale dei 100 campioni per la linearità di  $m^*[T]$ . Lo scarto quadratico medio campionario dei 10 sottogruppi  $\sigma^*[m_k^*] = 0.010$  s è differente dallo scarto quadratico medio relativo ai 100 dati  $\sigma_{100}^* = 0.042$  s perché si riferisce ai dati delle medie calcolate per ogni sottogruppo, e non ai 100 dati singoli indipendenti. In particolare il sigma relativo alle medie risulta essere inferiore rispetto a quello dei 100 dati, e un riscontro di questo fatto lo possiamo osservare dal grafico (Figure 4), vedendo che nell'istogramma delle medie c'è molta meno dispersione dei dati. Il rapporto campionario  $r^* = \frac{\sigma_{100}^*[T]}{\sigma^*[m_k^*]} \approx 4.2$ , mentre il valore atteso è  $\sim \sqrt{n}$  con  $n=10$  che è  $\approx 3.2$ .

A questo punto si può sintetizzare il risultato finale delle 100 misurazioni del periodo con un unico intervallo di incertezza tipo  $T = T_0 \pm \sigma[T_0]$ , dove il valore centrale  $T_0$  è ben stimato dalla media campionaria, mentre l'incertezza è data dalle fluttuazioni di tipo "A" della media, cioè  $\sigma[T_{cas}] = \sigma[m^*]$  e dall'incertezza di risoluzione dello strumento  $\sigma[T_{ris}]$ .

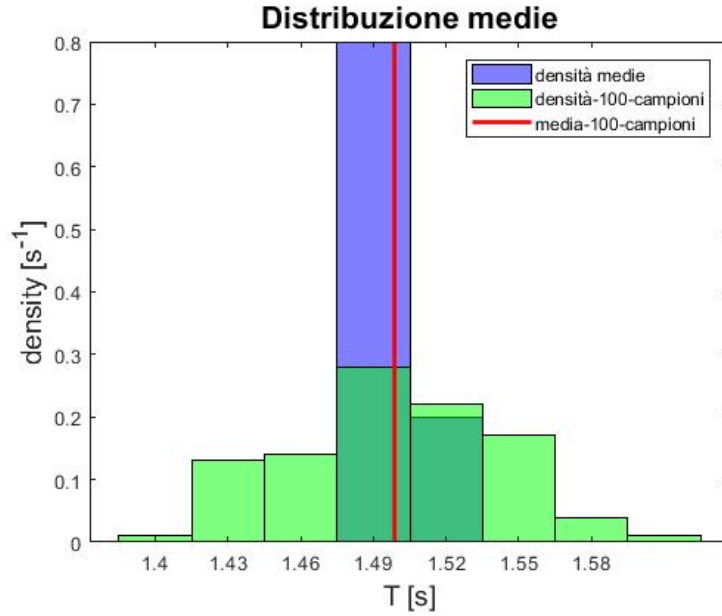


Figure 4: I due istogrammi rappresentano rispettivamente la densità delle medie calcolate per ogni sottogruppo di 10 campioni sui 100 totali e la densità delle 100 misurazioni del periodo del pendolo. Per i due istogrammi è stato scelto lo stesso binning  $\Delta x_b = 0.03s$ . In più è rappresentata la media campionaria dei 100 campioni, che per linearità coincide anche con la media totale delle medie dei sottogruppi.

Infine prendiamo in esame le 20 misure delle 5 oscillazioni del pendolo. Scopo di queste misurazione è osservare come variano gli errori relativi alle misurazioni, infatti in questa procedura per trovare il periodo di una singola oscillazione basterà dividere le misure ottenute per 5, e così facendo si dividerà anche l'errore di risoluzione portandolo a  $\Delta X_{r5} = \Delta X_r/5 = 0.002 s$ . La media campionaria di questi dati è  $m_5^* = 1.50 s$  e lo scarto quadratico medio campionario è  $\sigma_5^* = 0.004 s$ . Confrontando questi dati con le 20 misure di una singola oscillazione si trovano delle differenze non poco significative. Tra le medie dei due set di misurazione c'è una differenza di circa  $0.05 s$ , che non è trascurabile pensando che la risoluzione

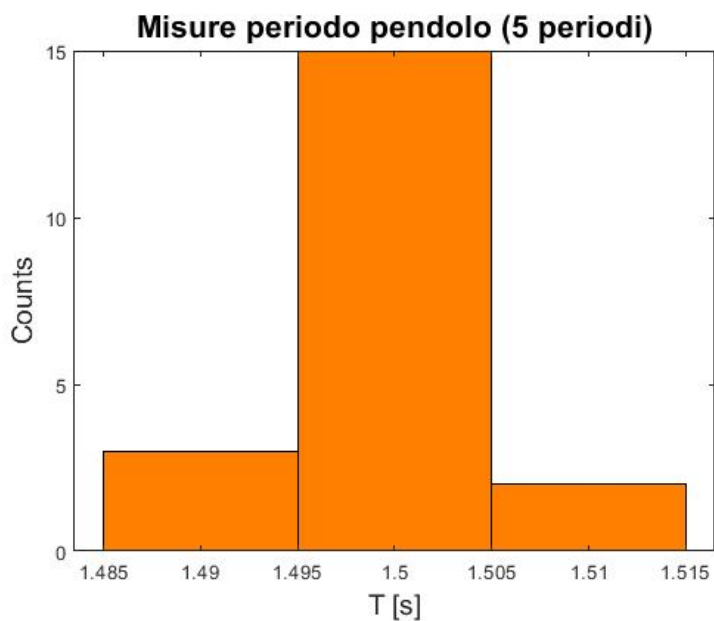


Figure 5: Il grafico rappresenta i conteggi di 20 misure del periodo del pendolo, ottenuto dividendo per 5 il periodo di 5 oscillazioni, in modo da ridurre l'incertezza di risoluzione. L'intervallo dei bins è  $\Delta x_b = 0.03 \text{ s}$

del cronometro è  $0.01 \text{ s}$ . Il dato più significativo è rappresentato dagli scarti quadratici medi ( $\sigma^* = 0.044 \text{ s}$ ,  $\sigma_5^* = 0.004 \text{ s}$ ), infatti quella dell'ultimo set (20x5) di misurazioni è molto inferiore rispetto a quella del primo set (20x1). Anche confrontando i due grafici (Figure 2-5) si può osservare un miglioramento per quel che riguarda la diminuzione di errori. Si può convenire che nella comparazione dei due set non entrano in gioco errori sistematici, perché l'operatore che ha eseguito le misurazioni era lo stesso e con le stesse modalità. Si verifica che gli errori casuali non variano, perché in ogni caso i riflessi e la prontezza dell'operatore coincidono con entrambi i set di misura. Una cosa che cambia è l'incertezza di risoluzione dello strumento utilizzato, possiamo perciò concludere che è questo il fattore che determina una diminuzione delle incertezze.

### 3.4 Conclusioni

In generale ogni misura è caratterizzata da incertezza, ma lo scopo principale è quello di ridurla per poter fare analisi più precise. In particolare per ridurre gli errori casuali si può aumentare il numero  $N$  di campioni, anche se man mano che ci si avvicina alla forma limite (nel caso del pendolo una campana) le incertezze rimangono le stesse (come nel caso della Figure 3).

Infine si può agire sull'incertezza di risoluzione di uno strumento, facendo nuove ipotesi (come quella di isocronismo per il pendolo), per diminuire l'errore totale. Infatti dall'ultimo risultato ottenuto (Figure 5) possiamo concludere che procedere con certe misurazioni adottando accorgimenti in modo da ridurre l'incertezza di risoluzione può minimizzare l'errore totale e, cosa non meno importante, far risparmiare molto tempo e fatica a chi fa le misure.