

Nona, decima e undicesima esperienza di laboratorio  
Relazione

Gruppo A12  
a.a 2018/2019

Brognoli Roberto, Garbi Luca  
12 Aprile 2018

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Materiali e metodi</b>	<b>2</b>
2.1	Materiali . . . . .	2
2.2	Procedure di misura . . . . .	3
2.2.1	Amplificatore differenziale . . . . .	3
2.2.2	Ponte di Wheatstone . . . . .	4
2.2.3	Effetto Faraday . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Analisi dei dati</b>	<b>7</b>
3.1	Amplificatore differenziale . . . . .	7
3.2	Ponte di Wheatstone . . . . .	9
3.3	Effetto Faraday . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Appendice</b>	<b>19</b>

# 1 Introduzione

La seguente relazione è divisa in tre parti. Inizialmente viene analizzato il comportamento di un amplificatore differenziale con transistor BJT, con e senza sorgente di corrente, e presentata la misura del guadagno *a modo comune* e del guadagno *differenziale*. Successivamente utilizziamo un ponte di Wheatstone, accoppiato ad un amplificatore differenziale, per misurare una resistenza incognita  $R_x$  valutando la risoluzione minima con cui si può misurare una variazione di resistenza. Infine studiamo il fenomeno di induzione elettromagnetica (effetto Faraday) verificando la dipendenza spaziale del campo prodotto da una bobina percorsa da corrente grazie al coefficiente di mutua induzione tra quest'ultima e un'altra bobina.

## 2 Materiali e metodi

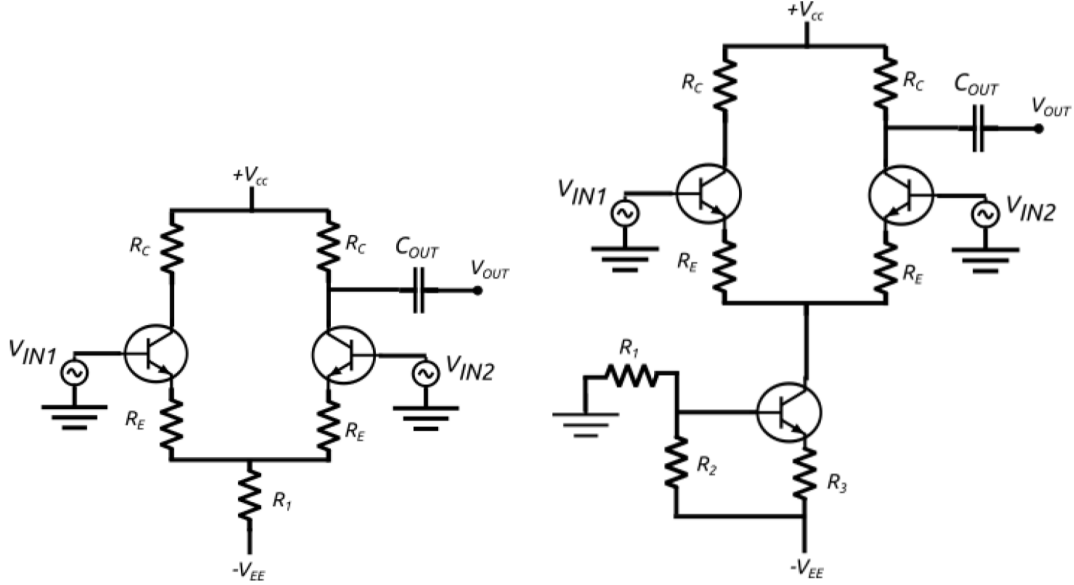
### 2.1 Materiali

- Breadboard;
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- condensatori elettrolitici (capacità nominale  $220 \mu F$ , incertezza garantita dal costruttore 20%);
- generatore di tensione continua *Agilent E3631A*;
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- generatore di funzione *Agilent 33120A* (impedenza nominale in uscita  $R_s = 50 \Omega$ );
- resistori vari (i valori di resistenza e incertezza sono specificati in seguito);
- trimmer da  $2 K\Omega$ ,  $10 K\Omega$ ;
- transistor BJT;
- due bobine (densità di corrente massima  $J = 4 A/mm^2$ , diametro filo  $\phi = 315 \mu m$ ,  $N_S = 31$  avvolgimenti la bobina sorgente (S) e  $N_R = 32$  quelle ricevitrice (R));
- Instek LCR-6100;
- flessometro, tubo in PVC, metro;
- cavi banana-banana, cavo coassiale BNC-banana, fili conduttori, clip a coccodrillo.

## 2.2 Procedure di misura

### 2.2.1 Amplificatore differenziale

Costruiamo l'amplificatore differenziale rappresentato nella figura seguente (Fig.1) con resistenza  $R_1$  e con sorgente di corrente, utilizzando  $V_{CC} = 15 V$  e  $V_{EE} = -15 V$ .



**Figure 1:** Amplificatore differenziale con e senza sorgente di corrente.

Il segnale in uscita è dato dall'espressione

$$V_{OUT} = G_{DIFF}(V_1 - V_2) + G_{CM}\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right) \quad (1)$$

I valori delle resistenze vengono scelti in modo da avere una corrente di quiescenza di  $0.75 mA$ , un guadagno differenziale tra 20 e 50 e un guadagno a modo comune inferiore a 1. Usando le seguenti espressioni

$$i_0^{DC} = \frac{14.4V}{2R_1 + R_E + r_e} \quad G_{diff} = \frac{R_C}{2(R_E + r_e)} \quad G_{CM}^1 = \frac{R_C}{R_e + r_e + 2R_1} \quad (2)$$

otteniamo i seguenti valori per l'amplificatore senza sorgente di corrente:

$$R_{C_{sx}} = 10178 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_{C_{dx}} = 10191 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_{E_{sx}} = 108.2 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_{E_{dx}} = 107.5 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_1 = 9536 \Omega \pm 0.2 \Omega.$$

I due valori di  $R_C$  e di  $R_E$  dovrebbero essere uguali ( $R_C = 10 k\Omega$  e  $R_E = 100 \Omega$ ), tuttavia i valori misurati sperimentalmente (con DMM 2-wire) differiscono tra di loro.

Il termine  $r_e$  che compare nella (2) è la resistenza interna dell'emettitore stimata come  $r_e \approx \frac{25 \text{ V}}{i_o \text{ (mA)}} \approx 33.3 \Omega$  e successivamente calcolata dai dati sperimentali.

I valori attesi sono quindi  $G_{diff} \approx 36$  e  $G_{CM} \approx 0.53$ .

Per quanto riguarda l'amplificatore con sorgente di corrente cambia l'espressione del guadagno a modo comune:

$$G_{CM}^2 \approx -\frac{R_C}{Z_S} \quad (3)$$

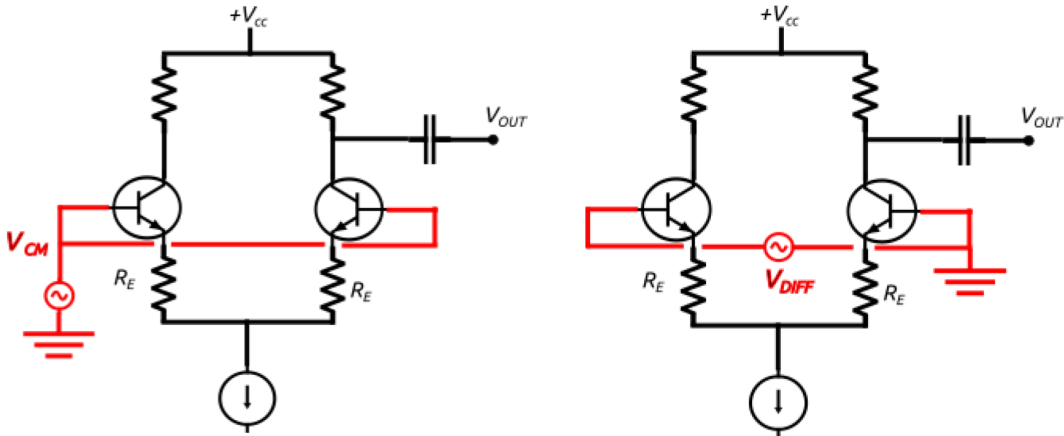
I valori delle resistenze utilizzate nella sorgente di corrente sono stati scelti in modo da mantenere una corrente di quiescenza pari a  $0.75 \text{ mA}$  ovvero una corrente misurata sopra il collettore di  $1.5 \text{ mA}$ :

$$R_1 = 4620 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_2 = 5764 \Omega \pm 0.2 \Omega;$$

$$R_3 = 5880 \Omega \pm 0.2 \Omega.$$

Per la misura di  $G_{CM}$  colleghiamo il generatore di funzione a entrambe le basi dei transistor utilizzati, in modo da avere una differenza di potenziale  $\Delta V = V_1 - V_2 = 0$ . Per la misura di  $G_{DIFF}$  invece colleghiamo la base di un transistor al generatore e la base del secondo transistor a terra. Le due configurazioni sono rappresentate in figura (2).

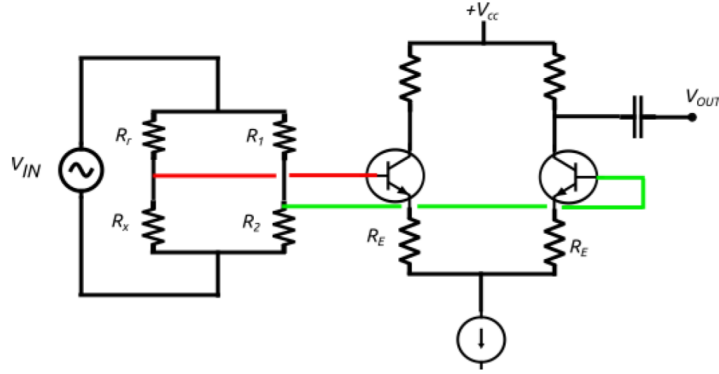


**Figure 2:** Schema del circuito per calcolo del guadagno a modo comune (sinistra) e del guadagno differenziale (destra).

Per entrambi i circuiti raccogliamo valori di voltaggio picco-picco per l'onda in entrata e per quella in uscita e la differenza di fase tra i due per 15 valori di frequenza.

### 2.2.2 Ponte di Wheatstone

Costruiamo il circuito in figura (3).  $R_X$  è la resistenza incognita di cui dobbiamo misurare il valore utilizzando il ponte. Essa è costituita da un parallelo di tre resistori  $R' = 0.218 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{p1} = 100.010 \text{ k}\Omega$  e  $R_{p2} = 101.368 \text{ k}\Omega$ . La misura fatta col DMM mostra  $R_X = 216.8\Omega \pm 0.2 \Omega$ .

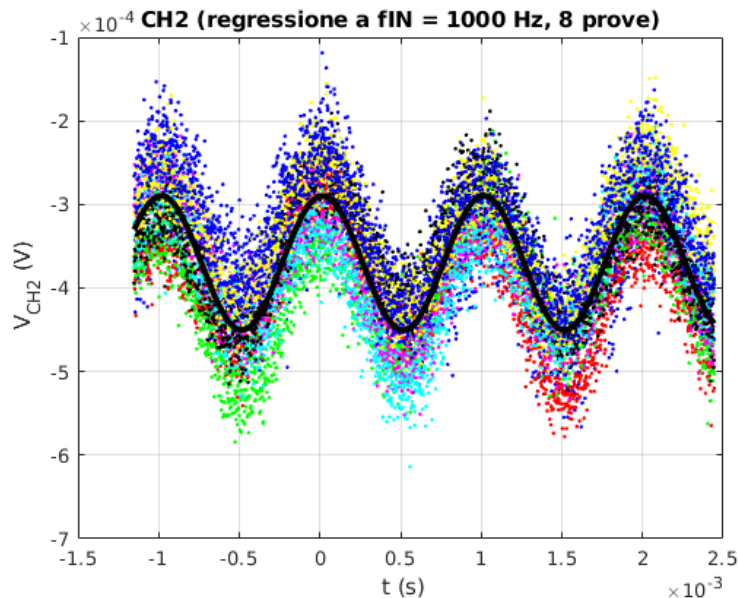


**Figure 3:** Ponte di Wheatstone. L'amplificatore differenziale è con sorgente di corrente.

Il  $\Delta V$  è dato dalla differenza tra il potenziale misurato tra  $R_r$  ed  $R_x$  e tra  $R_1$  ed  $R_2$ . La sua espressione è

$$\Delta V = V_{in} \left( \frac{R_x}{R_x + R_r} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right). \quad (4)$$

Regoliamo il trimmer (resistenze  $R_1$  e  $R_2$ ) in modo che  $\Delta V \approx 0$  (valore segnato dall'oscilloscopio tramite l'uscita  $V_{out}$ ) utilizzando  $R_r = 1001 \Omega \pm 0.2 \Omega$ ,  $V_{IN} = 4 V$  e una frequenza  $f = 200 Hz$ . Otteniamo  $R_1 = 1884 \Omega \pm 0.2 \Omega$  e  $R_2 = 0.998 \Omega \pm 0.2 \Omega$ . Acquisiamo il segnale  $V_{IN}$  in entrata e  $V_{OUT}$  in uscita a una frequenza  $f = 200 Hz$  e avviamo al problema delle piccole fluttuazioni di ampiezza e fase sui segnali in uscita dal ponte mediando su un gruppo di 8 acquisizioni e facendo un fit sinusoidale a frequenza fissata (inizialmente a  $200 Hz$ ). Nell'immagine successiva presentiamo un esempio di fit sinusoidale (Fig.4). Al fine di valutare il comportamento del circuito per variazioni di resistenza  $\delta R$



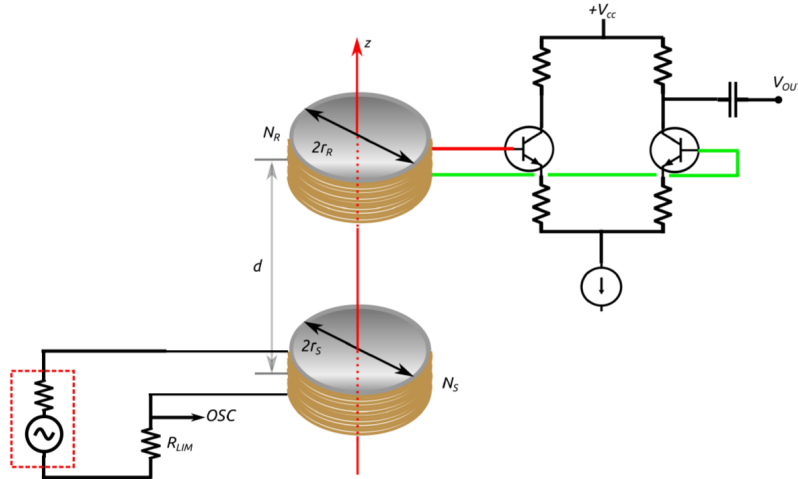
**Figure 4:** Esempio di fit sinusoidale, in nero il segnale a frequenza fissata.

aggiungiamo e togliamo prima una, e poi due, resistenze da  $100\text{ K}\Omega$  in parallelo ad  $R_X$ . Per valutare invece la risposta a variazioni di capacità  $\delta C$  aggiungiamo in sequenza, in parallelo alla resistenza  $R_X$ , quattro condensatori di capacità  $1\text{ nF}$ .

Ripetiamo le operazioni fatte con i condensatori per valori di frequenza pari a  $200\text{ Hz}$ ,  $1\text{ KHz}$  e  $5\text{ KHz}$  evidenziando la dipendenza della risposta dalla frequenza utilizzata.

### 2.2.3 Effetto Faraday

Per l'analisi dell'effetto Faraday costruiamo il circuito in figura (5).



**Figure 5:** Schema del circuito costruito

Collegiamo la bobina R all'amplificatore differenziale e mandiamo a terra uno dei due input in modo tale da misurare una differenza di potenziale  $\Delta V = V_1 - V_2$  coincidente con la fem indotta. La bobina S viene collegata al generatore tramite un'altra breadboard, posta distante dall'altra e dalle bobine, per evitare un accoppiamento spurio tra la sorgente e il circuito dell'amplificatore e per far sì che nella bobina R l'induzione dovuta al passaggio di corrente nelle breadboard sia trascurabile. I componenti presenti nell'amplificatore sono gli stessi presentati nella sezione precedente;  $R_{LIM} = 49.76\ \Omega \pm 0.2\ \Omega$  mentre inizialmente la corrente che scorre nella bobina che funge da sorgente è  $i_s = 42.89\text{ mA}$ . Le bobine, di raggio  $r_{bob} = 8.75\text{ mm}$  e sezione  $\Sigma_S = \Sigma_R = \pi r_S^2$ , vengono poste a 8 valori di distanza differenti (grazie ad un tubo di plastica e a un metro) da  $20\text{ mm}$  a  $20\text{ cm}$ . Per ciascuna di queste, ad eccezione di quella a distanza più ravvicinata, utilizziamo 5 valori di frequenza compresi tra  $1\text{ KHz}$  a  $200\text{ KHz}$  ed acquisiamo le forme d'onda del segnale in entrata e in uscita per 10 volte. Successivamente effettuiamo un fit sinusoidale sui segnali come descritto in precedenza. Per  $d = 20\text{ mm}$  prendiamo invece in modo analogo 15 misure di frequenza. Prima di iniziare e dopo aver finito queste misure, acquisiamo dati con la bobina R con entrambi gli input collegati a terra in modo da quantificare l'induzione dovuta a segnali spuri e non a quella della corrente passante nella bobina S.

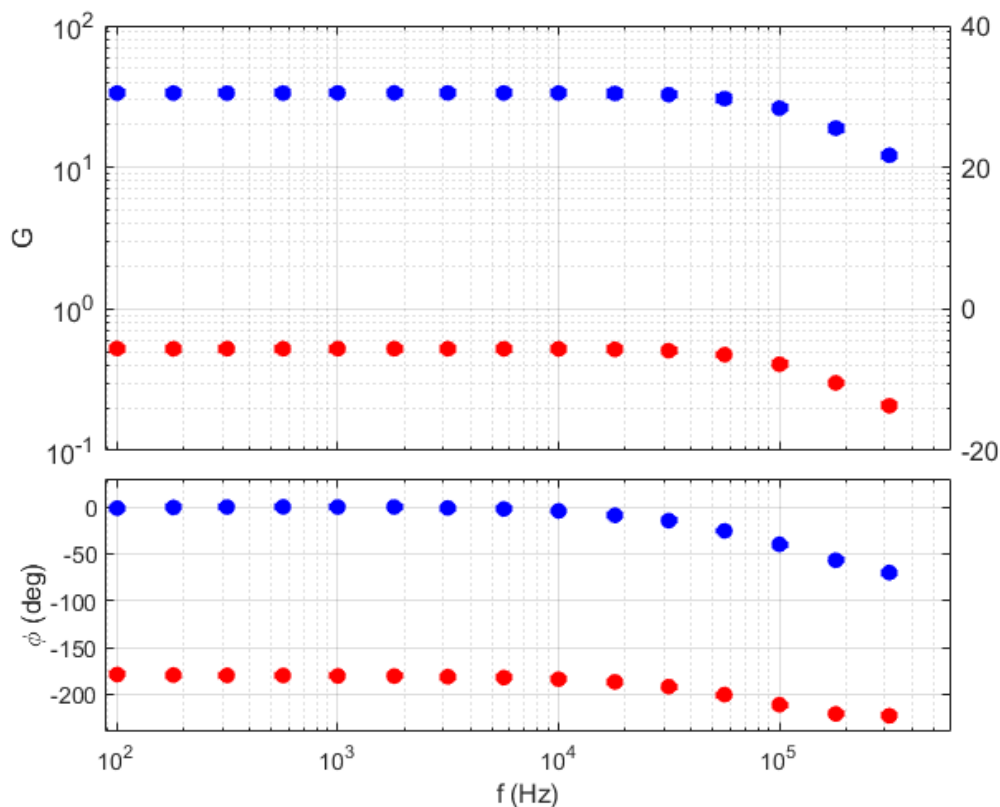
### 3 Analisi dei dati

Come per le procedure di misura anche l'analisi dei dati è suddivisa in tre sezioni principali. La prima parte di studio dell'amplificatore differenziale sarà necessaria per un accorto utilizzo del ponte di Wheatstone presente nella seconda sezione, nondimeno la caratterizzazione del guadagno differenziale in funzione della frequenza sarà fondamentale per la misura dell'effetto Faraday.

Non viene riportata una conclusione estesa in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

#### 3.1 Amplificatore differenziale

Nelle figure seguenti (fig.6 e fig.7) sono rappresentati il modulo e la fase del guadagno differenziale e a modo comune di entrambi i circuiti (senza e con sorgente di corrente).

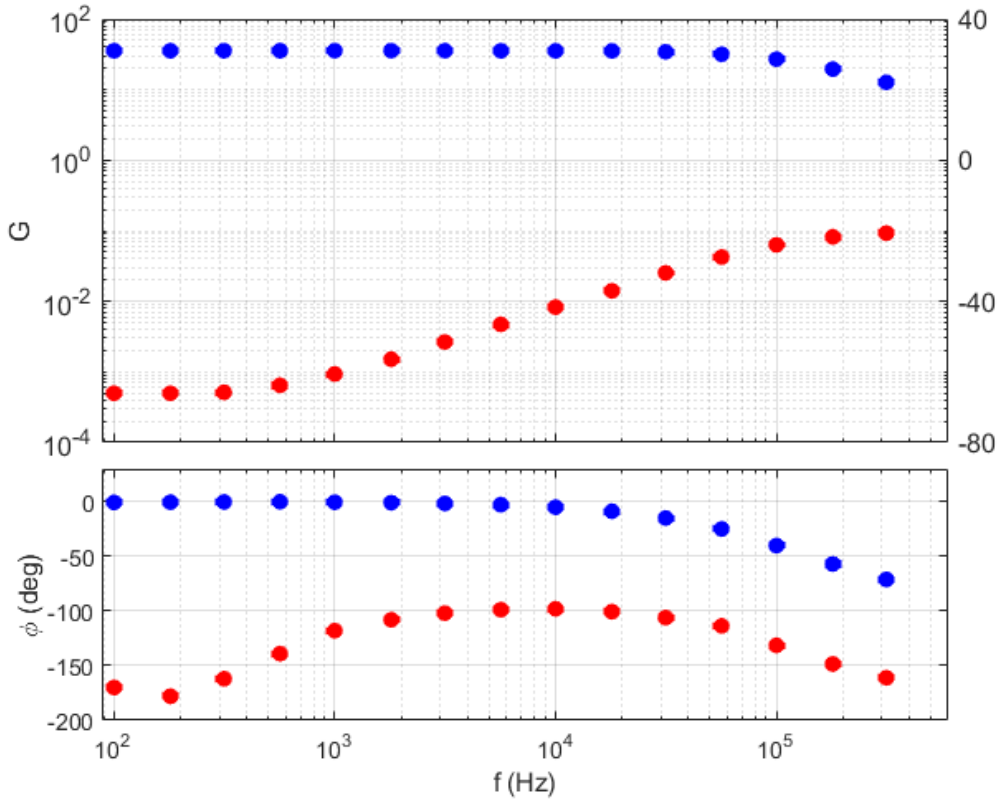


**Figure 6:** Amplificatore senza sorgente di corrente. Le misure relative al guadagno differenziale sono in *blu*, mentre quelle relative al guadagno a modo comune in *rosso*.

I guadagni sono stati calcolati a partire dall'equazione 1 ponendo, nel caso differenziale,  $V_{IN2} = 0$  e nel modo comune  $V_{IN1} = V_{IN2}$ . Otteniamo così:

$$G_{CM} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \quad G_{DIFF} = \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} - \frac{G_{CM}}{2} .$$





**Figure 7:** Amplificatore con sorgente di corrente. Le misure relative al guadagno differenziale sono in *blu*, mentre quelle relative al guadagno a modo comune in *rosso*.

Notiamo che i guadagni dipendono dalla frequenza dell'onda in entrata. Il modello utilizzato per stimare il  $G_{DIFF}$  per i due circuiti e il  $G_{CM}$  dell'amplificatore senza sorgente di corrente non prevede una dipendenza dalla frequenza poiché nello studio del circuito non sono state considerate capacità parassite come, ad esempio, quella dell'oscilloscopio. Nelle misure sperimentali invece l'influenza della capacità dell'oscilloscopio risulta evidente, soprattutto a frequenze alte. Questo effetto influirà poi sui risultati delle sezioni successive dove verrà utilizzato un modello di guadagno ottenuto tramite interpolazione con i dati sperimentali. Dai guadagni possiamo calcolare il  $CMRR = \frac{G_{DIFF}}{G_{CM}}$ . Dato che il guadagno dell'amplificatore varia con la frequenza otteniamo più valori di  $CMRR$ . Essi sono riportati in *Appendice* in tabella (1). Si può osservare che, in corrispondenza di ogni frequenza, il  $CMRR$  dell'amplificatore con sorgente di corrente è più alto di quello senza la sorgente: infatti dai grafici si nota che il  $G_{CM}$  del circuito con sorgente è molto più piccolo rispetto al caso senza sorgente.

Possiamo utilizzare la misura del guadagno differenziale per stimare la resistenza interna dell'emettitore  $r_e$ . Essa può essere ricavata dall'espressione del guadagno differenziale (vedi 2):  $r_e = \frac{R_C^{dx}}{2G_{DIFF}} - R_E^{sx}$ . Si ottengono 15 valori per l'amplificatore senza sorgente e altrettanti per quello con la sorgente. I valori di  $r_e$  sono riportati in *appendice* in tabella (2).

Per avere una stima approssimativa della resistenza dell'emettitore possiamo fare una media dei primi 10 valori ottenuti per ciascuna configurazione, ovvero nel range di frequenze dove i guadagni sono più stabili. Otteniamo  $r_e^1 = 44.0 \Omega \pm 0.5 \Omega$  e  $r_e^2 = 34.7 \Omega \pm 0.4 \Omega$ , quest'ultimo, più accurato è coerente con la stima fatta precedentemente.

Ricaviamo ora l'impedenza  $Z_S$  della sorgente di corrente, che possiamo vedere come un parallelo di una resistenza  $R_S$  e di una capacità  $C_S$ . L'espressione dell'impedenza è pertanto

$$Z_S = \left( \frac{1}{R_S} + j\omega C_S \right)^{-1}$$

Estraiamo quindi parte reale e parte immaginaria dal guadagno  $G_{CM}^2$  da

$$G_{CM}^2 \approx -\frac{R_C}{Z_S} = |G_{CM}^2|e^{-j\phi}$$

ottenendo

$$R_S = \frac{-R_C^{sx}}{2\Re(G_{CM}^2)}$$

e

$$C_S = -\Im \frac{(G_{CM}^2)}{R_C^{sx} \pi f}$$

Possiamo ricavare una stima del valore numerico facendo una media su alcuni dei valori che risultano dalle espressioni precedenti. In particolare, per  $R_S$  possiamo fare una media sui primi 10 risultati mentre per  $C_S$  sui rimanenti 5. Questo perché, avendo modellizzato la sorgente di corrente come un parallelo tra una resistenza e una capacità, a basse frequenze la prima ha contribuito dominante nell'impedenza mentre la seconda risulta trascurabile (la corrente "preferisce" scorrere nel resistore); a frequenze alte la situazione è invertita. Abbiamo pertanto  $R_S \approx 8.67 M\Omega$  e  $C_S \approx 16 pF$ .

### 3.2 Ponte di Wheatstone

Quando il ponte è bilanciato inizialmente misuriamo un voltaggio *peak-to-peak* in uscita dall'amplificatore di circa  $\Delta V = 730 \mu V$ . Se fossimo nella situazione in cui  $\Delta V = 0$ , allora dall'equazione (4) otterremmo per la nostra resistenza incognita il valore

$$R_x = R_R \frac{R_2}{R_1} = 216.51 \Omega \pm 0.12 \Omega.$$

Notiamo subito che il valore così trovato è in accordo con quello misurato con il multimetro digitale entro due deviazioni standard. Per avere una stima più precisa dobbiamo però tener conto di fattori quali il guadagno a modo comune dell'amplificatore e il fatto che il ponte non sia bilanciato perfettamente.

Per effettuare queste correzioni dobbiamo studiare la sensibilità del ponte a piccoli cambiamenti di resistenza  $\delta R_x$  ed eventualmente di capacità  $\delta C_x$  residue. Possiamo immaginare queste ultime rispettivamente in serie e in parallelo ad  $R_x$ . In tal caso possiamo approssimare il segnale in uscita dal ponte come

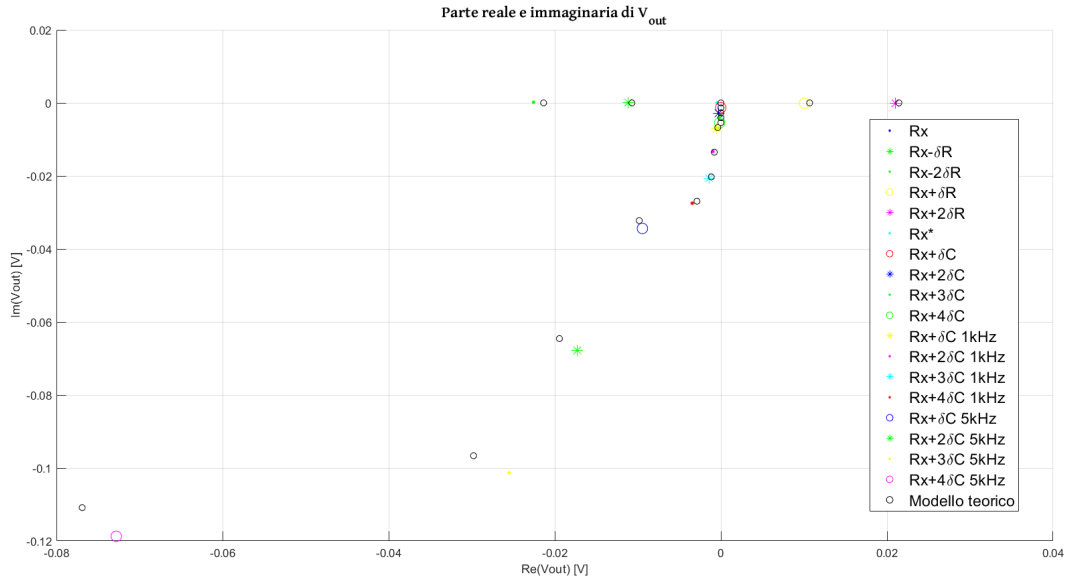
$$\Delta V_{BR} \approx V_{IN} \frac{R_R}{(R_R + R_x)^2} [\delta R_x - j(\omega R_x^2 \delta C_x)].$$

Se vediamo il ponte come un circuito equivalente  $\Delta V_{BR}$  è il  $\Delta V_{EQ}$ , mentre l'impedenza equivalente non è altro che la  $Z_{OUT}$  del ponte, che, nel nostro caso, essendo  $R_{GEN}$  trascurabile rispetto ad  $R_x$ ,  $R_R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , possiamo scrivere come  $Z_{OUT} \approx (R_x || R_R) + (R_1 || R_2)$ . A questo punto il carico del circuito equivalente diventa l'impedenza in ingresso dell'amplificatore che, riferendoci ai dati della sezione precedente, vale  $Z_{IN} \approx 2\beta(R_E + r_e)$ . Dove per  $\beta$  abbiamo utilizzato appunto il *beta factor* ottenuto in una precedente caratterizzazione dei nostri transistor.

Il valore in uscita dall'amplificatore può ora essere trovato moltiplicando il guadagno differenziale (funzione della frequenza  $f$ ) per il segnale in entrata allo stesso amplificatore. Il segnale in entrata sarà a sua volta quello dato da un semplice partitore di impedenza del circuito equivalente. Utilizziamo un tool di *Curve Fitting* per trovare la funzione polinomiale che meglio descrive l'andamento di  $G_{DIFF}$  in funzione della frequenza a partire dai dati della sezione precedente. Fatto questo procediamo con il calcolo teorico del voltaggio in uscita dall'amplificatore trovando

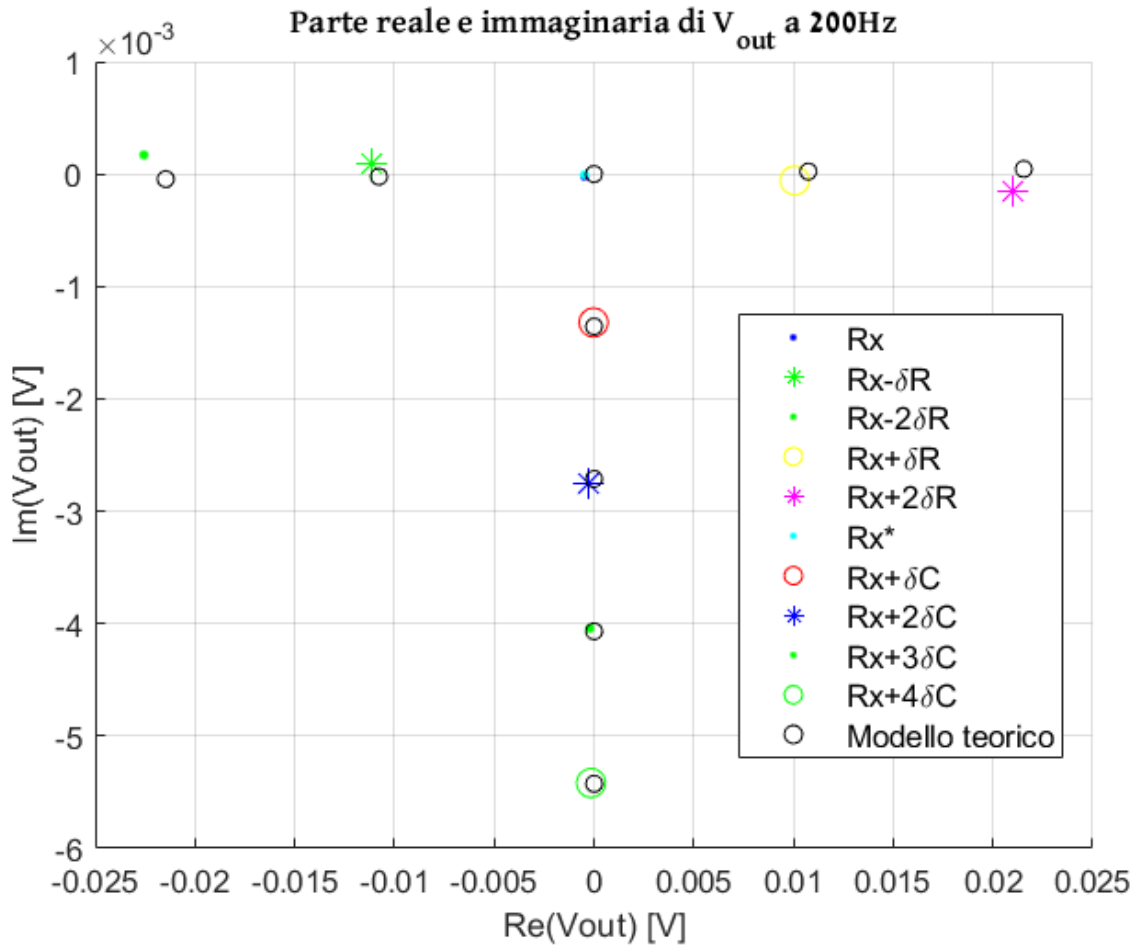
$$V_{OUT}(f) \approx V_{IN} \frac{R_R}{(R_R + R_x)^2} [\delta R_x - j(2\pi f R_x^2 \delta C_x)] \frac{Z_{IN}}{Z_{IN} + Z_{OUT}} G_{DIFF}(f). \quad (5)$$

I dati sperimentali e teorici per il voltaggio in uscita sono rappresentati nel grafico  $\Im(V_{OUT})$  vs  $\Re(V_{OUT})$  seguente (Fig.8). In nero i dati ottenuti tramite la (5), gli altri, secondo legenda, sono stati ottenuti attraverso i fit sinusoidali descritti nelle procedure. In questo



**Figure 8:** Parte immaginaria vs parte reale del voltaggio in uscita per le varie configurazioni.

grafico notiamo subito qualitativamente un buon accordo per i dati presi a 200 Hz (di seguito un grafico apposito). Le approssimazioni teoriche fatte a frequenze più alte diventano sempre meno attendibili invece. Lo stesso vale per le fluttuazioni statistiche dei dati sperimentali presi a 1000 Hz e 5000 Hz, le quali sono più grandi rispetto a quelle rilevate a 200 Hz. Da questo zoom possiamo notare che i dati sperimentali relativi al cambiamento

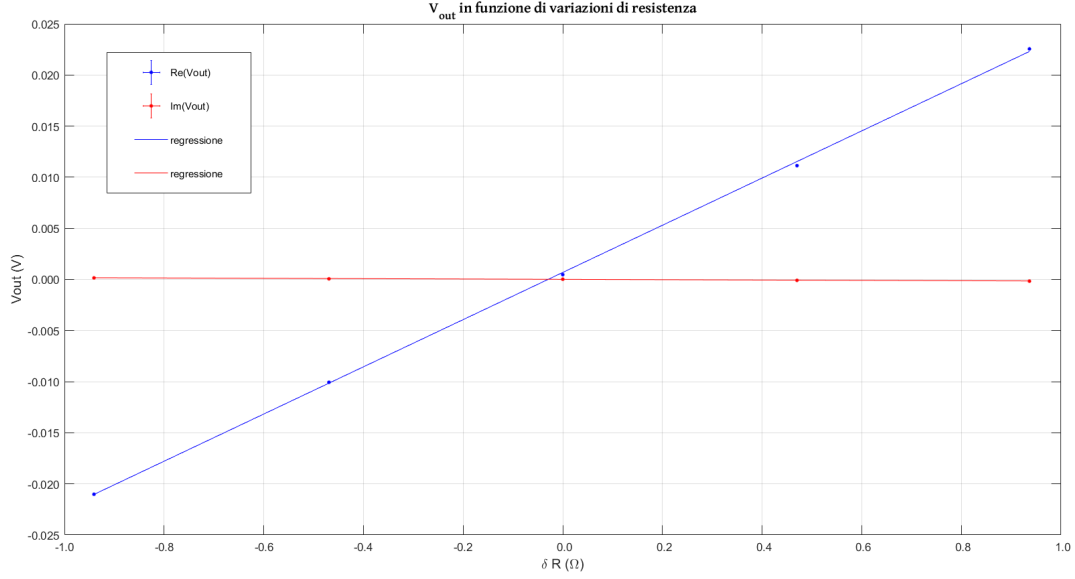


**Figure 9:** Zoom sul grafico di parte immaginaria *vs* parte reale del voltaggio in uscita per le varie configurazioni.

di resistenza, al contrario di quanto predetto dalla teoria, presentano anche una variazione per quanto riguarda la fase (ovvero la parte immaginaria). Per quanto piccola è chiaramente visibile. Possiamo solamente supporre sia un effetto non quantificabile dovuto al fatto che quando aggiungiamo e togliamo le resistenze in parallelo da  $100\text{ K}\Omega$  andiamo anche ad agire sulle capacità parassite presenti tra le stesse, le quali comportano anche una variazione di fase.

Per apprezzare meglio e più quantitativamente la sensibilità del ponte alle piccole variazioni di resistenza presentiamo di seguito un grafico (Fig.10) con le parti reale ed immaginaria di  $V_{OUT}$  in funzione della variazione di resistenza  $\delta R$ .

Le incertezze sulla variazione di resistenza sono state trovate propagando quelle date dal manuale del DMM, assunte come uno scarto tipo. Per quanto riguarda l'incertezza su parte reale ed immaginaria di  $V_{OUT}$  invece è stato utilizzato lo scarto quadratico medio ottenuto mediando sui fit sinusoidali delle 8 acquisizioni per ogni punto. Notiamo che anche in questo caso, per motivi analoghi a quelli esposti in precedenza, la parte immaginaria del segnale non è costante e uguale a zero, ma ha una leggera pendenza. La parte reale invece



**Figure 10:** Parte reale e immaginaria di  $V_{OUT}$  in funzione di cambi di resistenza.

segue un andamento lineare, come ci aspettavamo da (5), con una pendenza

$$B_R = \frac{\partial}{\partial \delta R} \Re(V_{OUT}) = 23.1 \text{ mV}/\Omega \pm 0.2 \text{ mV}/\Omega.$$

Eseguendo un test del chi quadrato troviamo un  $\chi_r^2 \approx 62$ , attribuiamo la colpa di questo dato al fatto che la precarietà dei contatti nella breadboard genera fluttuazioni nel segnale che sovrastano il normale rumore statistico.

Possiamo calcolare a partire dal modello la pendenza teorica della parte reale  $B_R$  derivando in  $\delta R_x$  la parte reale della (5):

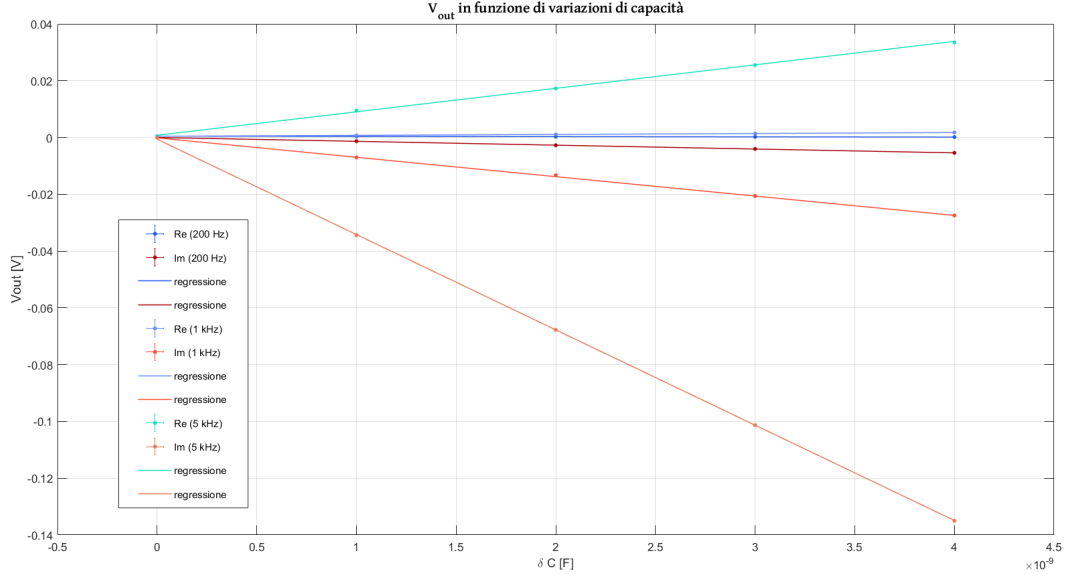
$$\frac{\partial}{\partial \delta R_x} \Re(V_{OUT}) = B_R^{teo} = V_{IN} \frac{R_R}{(R_R + R_x)^2} [\delta R_x] \frac{Z_{IN}}{Z_{IN} + Z_{OUT}} \Re(G_{DIFF}). \quad (6)$$

Sostituendo i nostri valori otteniamo  $B_R^{teo} = 22.9 \text{ mV} \pm 0.06 \text{ mV}$ , dato che è effettivamente in accordo con le nostre evidenze sperimentali.

Per quanto riguarda la variazione di  $V_{OUT}$  rispetto all'aggiunta di piccole capacità parallele ad  $R_x$  otteniamo il grafico seguente (Fig.11), dove sono state raffigurate sia parte reale che immaginaria per ogni valore di frequenza. Nonostante per motivazioni analoghe a quelle appena esposte il test del chi quadrato non dia risultati positivi, anche in questo caso l'andamento di tutti i punti in funzione della variazione di capacità è chiaramente lineare. Notiamo inoltre che, in accordo con il modello teorico (5), la parte immaginaria di  $V_{OUT}$  è più sensibile a cambiamenti di capacità quando la frequenza è più alta. Troviamo come pendenza per le varie frequenze

$$B_C^{200} = \frac{\partial}{\partial \delta C} \Im(V_{OUT}) = -1.35 \text{ mV}/\text{nF} \pm 0.03 \text{ mV}/\text{nF},$$

e  $B_C^{1k} = -6.83 \text{ mV}/\text{nF} \pm 0.05 \text{ mV}/\text{nF}$ , infine  $B_C^{5k} = -33.58 \text{ mV}/\text{nF} \pm 0.12 \text{ mV}/\text{nF}$ .



**Figure 11:** Parte reale e immaginaria di  $V_{OUT}$  in funzione di cambi di capacità.

Analogamente al caso della variazione di resistenza possiamo calcolare la pendenza teorica:

$$B_{C-teo}^{200} = -1.35 \text{ mV/nF} \pm 0.01 \text{ mV/nF}, \quad B_{C-teo}^{1k} = -6.77 \text{ mV/nF} \pm 0.01 \text{ mV/nF}$$

e

$$B_{C-teo}^{5k} = -32.64 \text{ mV/nF} \pm 0.01 \text{ mV/nF}.$$

Osserviamo che i valori teorici per le frequenze a 200 Hz e 1000 Hz sono in accordo con quelli sperimentali, questo non vale per la frequenza più alta poiché, come detto in precedenza, le approssimazioni fatte (come quella di trascurare le capacità parassite) sono meno valide aumentando  $\omega$ .

Prima di stimare quale sia il valore minimo di resistenza risolvibile con il nostro circuito di misura possiamo calcolare con una formula meno approssimata la nostra resistenza incognita. Tenendo conto del fatto che il nostro ponte non era completamente bilanciato all'inizio possiamo calcolare  $R_x$  applicando una correzione alla stima precedente:

$$R_X = R_R \frac{R_2}{R_1} + \frac{\Re(V_{OUT}) - \Re(G_{CM})V_{IN} \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{B_R} = 216.54 \Omega \pm 0.12 \Omega.$$

Vediamo che sebbene il valore medio di resistenza sia più vicino a quello misurato con il DMM ( $216.8\Omega \pm 0.2 \Omega$ ), il valore trovato ora non è drasticamente diverso da quello ottenuto senza il fattore correttivo, osserviamo comunque una buona corrispondenza (entro 2 scarti tipo) con il dato del multimetro.

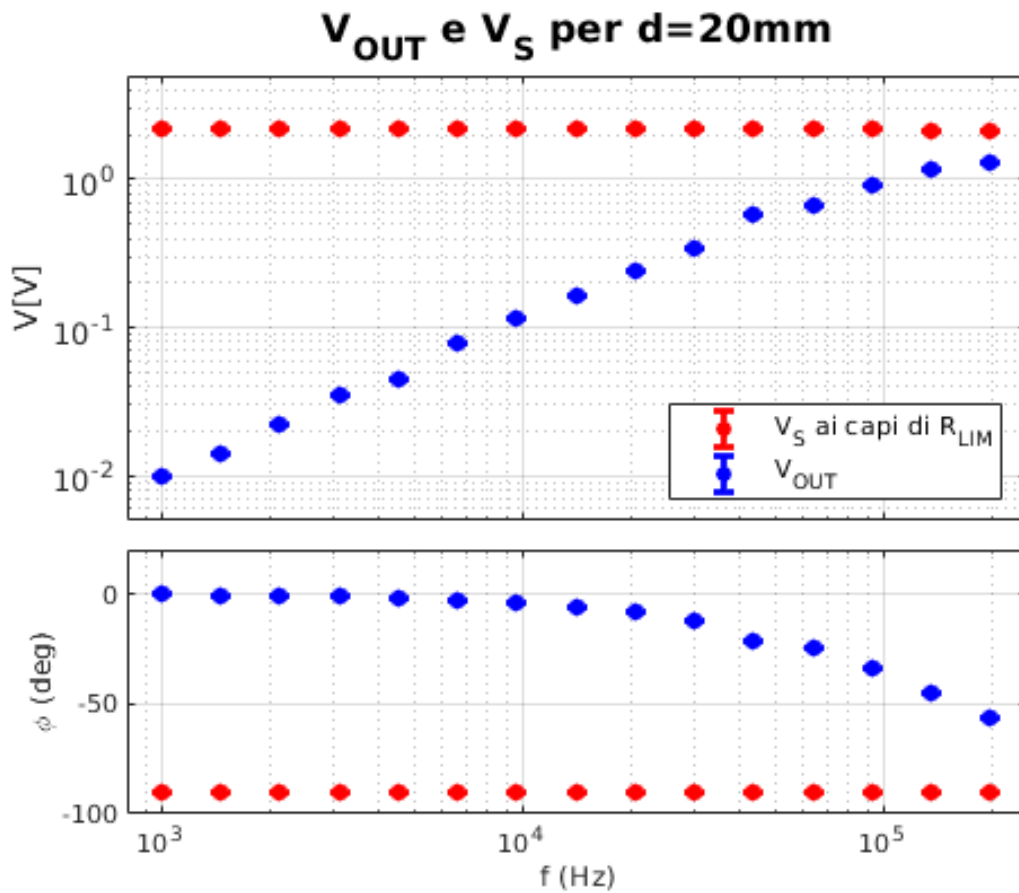
A ponte bilanciato possiamo trovare quanto valga la minima variazione di resistenza risolvibile con il ponte ed il nostro circuito di misura, ovvero una deviazione standard, da

$$\sigma[\delta R_x] \approx \frac{\sigma[\Re(V_{OUT})]}{|B_R|} = \frac{17.75 \mu V}{23.1 \text{ mV}/\Omega} = 0.77 \text{ m}\Omega.$$

Questa stima, che corrisponde a circa 3 ppm rispetto al nostro valore di resistenza, è molto indicativa e oggetta a variazioni. Infatti è basata su 8 acquisizioni prese in un arco temporale molto ristretto e non implica la stabilità di questa risoluzione per tempi più lunghi (oltre che per variazioni del campo termico e altri fenomeni simili).

### 3.3 Effetto Faraday

Nel grafico seguente (Fig.12) sono presentati i dati, ampiezza e fase, della tensione  $V_S$  misurata ai capi della resistenza  $R_{LIM}$  e di  $V_{OUT}$  in uscita all'amplificatore, quando le bobine sono a distanza  $d = 20\text{ mm}$ .



**Figure 12:** Voltaggio modulo e fase ai due canali dell'oscilloscopio.

Notiamo subito che  $V_S$  ha modulo e fase costanti per tutti i valori di frequenza. Per  $V_{OUT}$  invece è presente un visibile aumento del modulo con la frequenza, ma nel contempo la fase, che era inizialmente differente di  $90^\circ$  rispetto al segnale della sorgente, diminuisce. Possiamo vedere che per frequenze maggiori di 1 MHz l'andamento del segnale in uscita al ponte è più attenuato rispetto a prima, il fenomeno è dovuto all'effetto passa basso dell'amplificatore differenziale, evidenziato nei grafici del guadagno esposti nella prima sezione.

Ora sperimentalmente possiamo trovare il coefficiente di mutua induzione delle due bobine  $M_{RS} = M_{SR}$  dalla definizione  $\Phi_S \equiv M_{RS}i_S$ , otteniamo infatti che, derivando a destra e sinistra e chiamando  $\mathcal{E}$  la *fem* indotta sulla bobina 'ricevitore':

$$\mathcal{E}_R = -\frac{dM_{RS}i_S}{dt}$$

. Teniamo presente che  $i_S(t) = i_0 \exp(j\omega t)$ , otteniamo

$$\mathcal{E}_R = -M_{RS}j\omega i_0 \exp(j\omega t) = -j\omega M_{RS}i_S \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_R}{i_S} = -j\omega M_{RS}. \quad (7)$$

D'altra parte sappiamo anche vale

$$\mathcal{E}_R = -\frac{d\Phi_R(B_S)}{dt} = -N_R \Sigma_R \frac{d\bar{B}_z}{dt},$$

e qui per la media del campo magnetico lungo  $z$  possiamo effettuare l'approssimazione a dipolo della nostra bobina. Questa approssimazione, che sarà tanto più valida quanto più ci allontaniamo con la bobina R dalla S ( $d \gg r_{bob}$ ), ci permette di scrivere

$$B_z(d) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2N_S \Sigma_S i_S(t)}{d^3},$$

a questo punto, sostituendo, otteniamo

$$\mathcal{E}_R^{teo} \approx -\frac{\mu_0 N_R N_S \Sigma_R \Sigma_S}{2\pi d^3} \frac{di_S(t)}{dt} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_R}{i_S} \approx -j\omega \frac{\mu_0 N_R N_S \Sigma_R \Sigma_S}{2\pi d^3}. \quad (8)$$

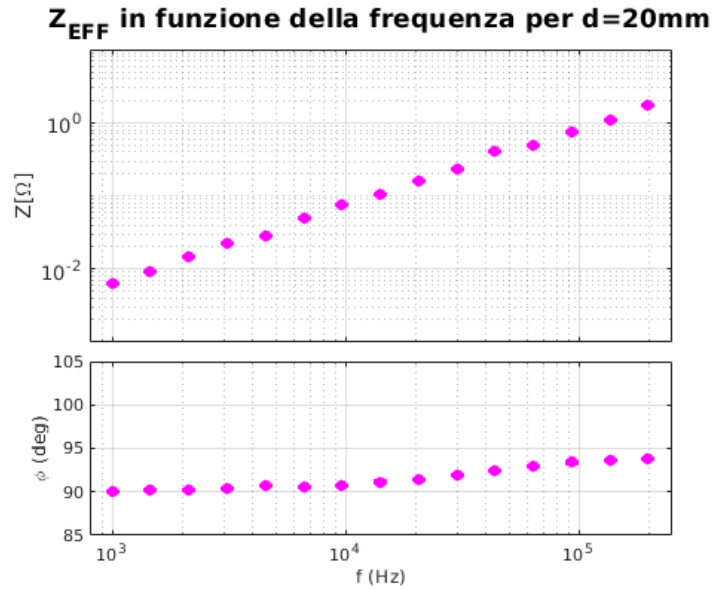
Troviamo allora che la frazione a secondo membro dell'ultima equazione è proprio il coefficiente di mutua induzione cercato.

A partire dalla (7) possiamo calcolare la stima sperimentale di  $M_{RS}$  dai nostri dati di  $V_{OUT}$  e  $V_S$ . Possiamo fare ciò scrivendo la corrente nel circuito sorgente come  $i_S = V_S/R_{LIM}$ . Per trovare la  $\mathcal{E}_R$  invece dobbiamo fare un'ulteriore approssimazione: quella di supporre che la *fem* indotta nel circuito ricevitore sia pari a  $V_{OUT}/G_{DIFF}$ , ovvero che il  $\Delta V$  in ingresso all'amplificatore sia pari a  $\mathcal{E}_R$ . L'errore che commettiamo facendo in questo modo è quello di trascurare l'effetto induttivo della bobina, la scelta è comunque legittimata dal fatto che l'impedenza in ingresso all'amplificatore (calcolata ed utilizzata nelle sezioni precedenti) è molto maggiore di  $\omega L$  della bobina, essendo  $L \approx 13.70 \mu H$  (misura effettuata con LCR). A questo punto abbiamo la grandezza complessa  $j\omega M_{RS}$ , con le dimensioni di un'impedenza (efficace) che possiamo chiamare  $Z_{EFF}$  che vale

$$Z_{EFF} \equiv j\omega M_{RS} \approx \frac{V_{OUT} R_{LIM}}{G_{DIFF} V_S},$$

ed è funzione della frequenza. Nel grafico seguente (Fig.13) sono riportati i valori di  $Z_{EFF}$  così trovati in funzione della frequenza per  $d = 20mm$ . Vediamo subito l'andamento lineare del modulo in scala logaritmica che a seguito di una regressione lineare risulta avere una pendenza compatibile con 1 entro 2 scarti tipo, proprio come ci aspettiamo dal modello. Osserviamo che la fase rimane costante sul valore di  $90^\circ$  fino a frequenze di  $10 KHz$ ,

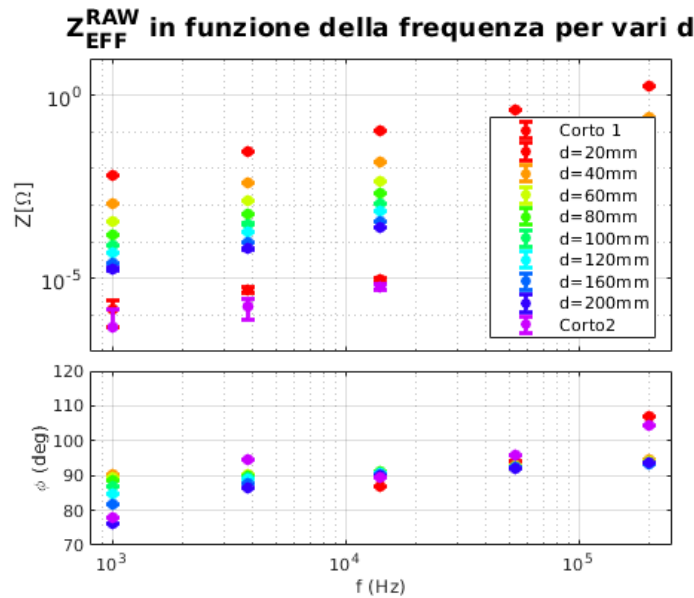




**Figure 13:**  $Z_{EFF}$  modulo e fase per  $d = 20 \text{ mm}$ .

oltre le quali aumenta leggermente, questo effetto è dovuto all'andamento in funzione della frequenza di  $G_{DIFF}$ . La fase risulta essere di  $90^\circ$  poiché chiaramente la  $fem$  indotta sarà sfasata di  $\pi/2$  rispetto alla corrente che scorre nella sorgente.

Sebbene per meno frequenze possiamo effettuare un grafico (Fig.14) degli  $Z_{EFF}$  trovati per tutte le distanze delle bobine e delle due misure bianche con l'amplificatore in corto. Come

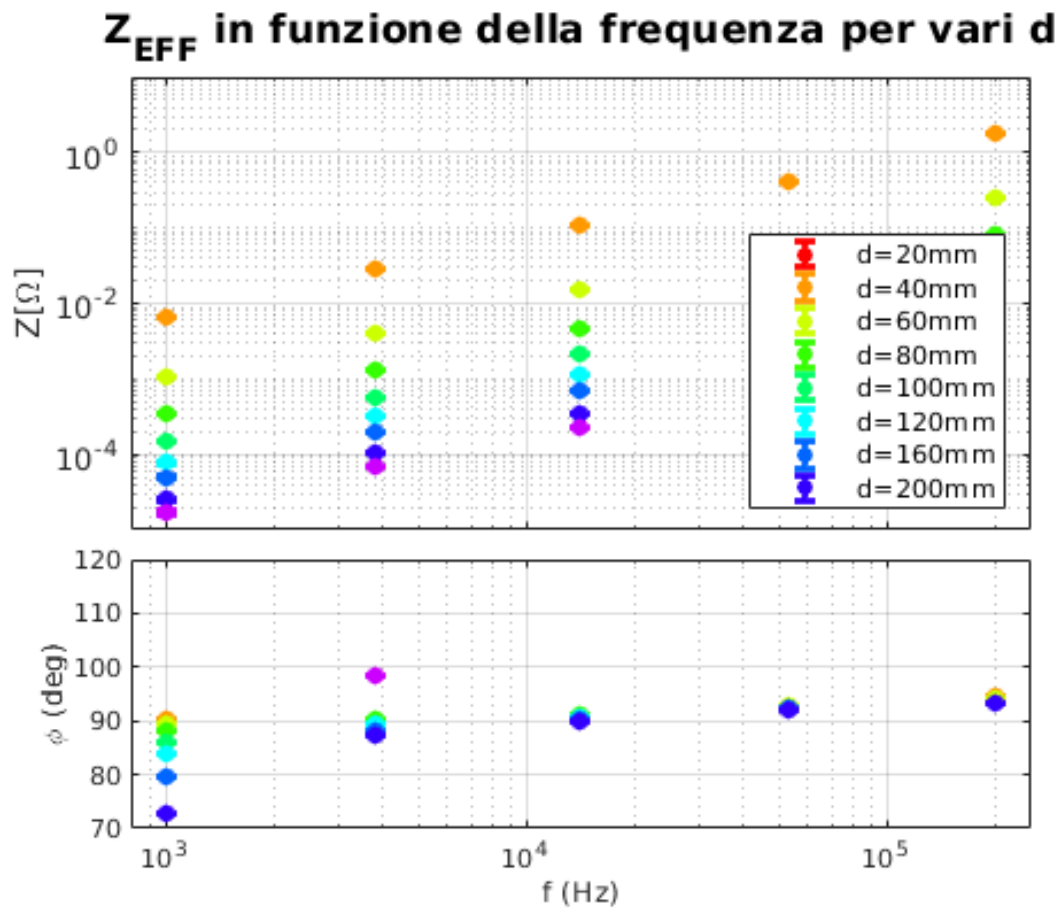


**Figure 14:**  $Z_{EFF}^{RAW}$  modulo e fase per tutti i valori di  $d$  e misure bianche.

da aspettarsi vediamo ancora l'andamento lineare della frequenza per tutte le distanze ed il segnale è sempre più attenuato quanto più la distanza tra le due bobine cresce. I due set di segnali con  $|Z_{EFF}|$  minore sono quelli con l'amplificatore in corto ed anche per questi

segnali c'è una proporzionalità con la frequenza. Questo fatto, ma in generale quello che il segnale non sia totalmente nullo per le misure bianche, è da imputare ad interferenze probabilmente fatte dai cavi coassiali che per il circuito ricevitore fungono da antenne del rumore presente in laboratorio. Per questo motivo è necessario tenere conto di questo effetto sottraendo ai nostri segnali di partenza, che chiamiamo  $Z_{EFF}^{RAW}$ , il segnale spurio. Essendo però, come si vede dal grafico, significativamente diverse le impedenze efficaci delle due misure bianche a distanze diverse, effettuiamo una media delle due da utilizzare come impedenza 'di controllo'.

I valori di  $Z_{EFF}$  così ottenuti sono rappresentati nel grafico seguente (15). Possiamo



**Figure 15:**  $Z_{EFF}$  modulo e fase al netto del segnale spurio per tutti i valori di  $d$ .

apprezzare il fatto che per frequenze basse, ovvero minori di  $10\text{ KHz}$ , la fase dei dati a distanze sopra i  $16\text{ cm}$  non risulta essere perfettamente di  $90^\circ$ , ma presenta variazioni dovute principalmente alle importanti fluttuazioni del segnale a distanze così grandi.

A questo punto per trovare i valori dei coefficienti di mutua induzione per le nostre bobine procediamo ad effettuare, per ogni distanza  $d$ , una regressione lineare alla retta

$$\Im(Z_{EFF}) = A + B\omega \Rightarrow B = M_{RS}.$$

Nel grafico logaritmico di seguito abbiamo raccolto i coefficienti di mutua induzione così

trovati in funzione della distanza  $d$ . Oltre ad una regressione lineare a tali dati è presentato anche il modello di  $M_{RS}$  teorico dato dalla (8), comunque soggetto all'approssimazione descritte in precedenza. Non possiamo fare a meno di notare che i nostri dati non seguono

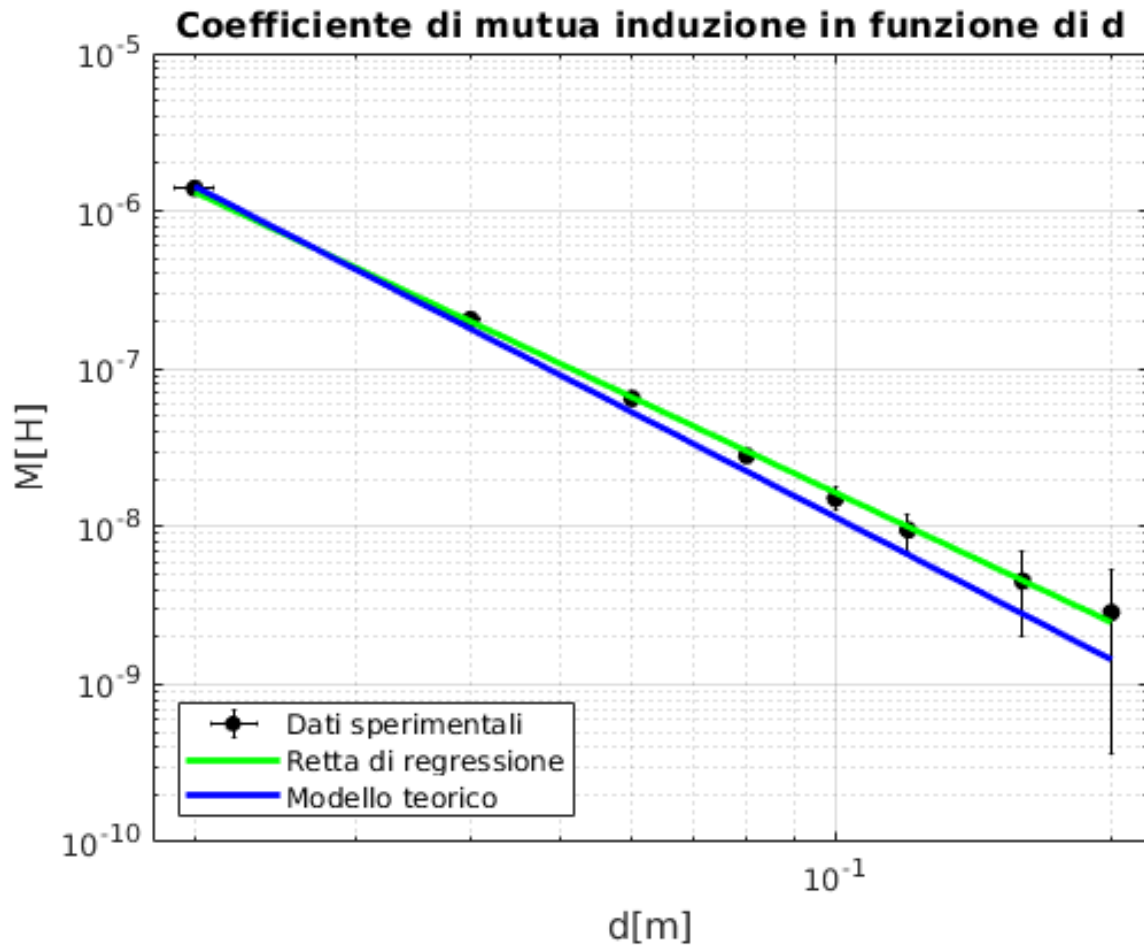


Figure 16: Schema del circuito costruito

questo modello, infatti la retta di regressione da noi trovata, con un  $\chi_r^2 = 2.6$ , ha una pendenza in asse logaritmico pari a  $b = -2.73 \pm 0.12$ . Quella predetta dal modello (8) è invece  $b_{teo} = -3$ , scalando  $M_{RS}$  come l'inverso del cubo della distanza  $d$ .

Questa non compatibilità è dovuta a vari fattori: chiaramente l'approssimazione a dipolo non è sufficientemente valida a piccole distanze, d'altra parte quando allontaniamo troppo le bobine la  $fem$  è così debole che il rumore gioca un importante ruolo nelle fluttuazioni del segnale. Effettivamente notiamo che effettuando una regressione solamente sui 4 dati centrali la pendenza in scala logaritmica migliora fino a  $b = -2.91 \pm 0.12$ , che risulta compatibile con questo modello teorico.

## 4 Appendice

**Table 1:** CMRR  $\omega$  per amplificatore con e senza sorgente di corrente.

CMRR senza sorgente	CMRR con sorgente
63.58	71560.64
63.83	7154701
63.75	6923903
63.83	55188.26
63.95	38113.59
63.97	23560.58
63.99	13469.12
64.02	7525.71
64.08	4284.32
64.07	2512.74
64.15	1360.12
64.20	748.76
64.33	428.15
62.88	238.49
58.81	136.91

**Table 2:**  $r_e$  per amplificatore con e senza sorgente di corrente.

$r_e$ senza sorgente	$r_e$ con sorgente
44.17	34.62
44.07	34.77
44.17	34.77
44.07	34.49
43.72	34.42
43.67	34.38
43.62	34.31
43.76	34.99
43.86	35.17
45.00	35.48
48.22	39.62
58.52	51.91
86.35	79.70
161.23	151.92
310.11	292.43