



**Corso di Fisica Computazionale**

**- Seconda Esercitazione -**

**STELLA DI NEUTRONI**

Cescato Matteo, Garbi Luca, Libardi Gabriele

*Issue: 1*

19 agosto 2020

Università degli Studi di Trento

Dipartimento di Fisica

Via Sommarive 14, 38123

Povo (TN), Italia

## Indice

<b>1</b>	<b>Stella di neutroni</b>	<b>1</b>
1.1	Gas omogeneo di fermioni . . . . .	2
1.2	Equazione di Lane-Emden . . . . .	4
1.3	Calcolo della massa in approssimazione non relativistica . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Descrizione del codice utilizzato</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Discussione dei risultati e confronto con la teoria</b>	<b>8</b>
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>11</b>
A.1	Risoluzione analitica dell'equazione di Lane-Emden in casi semplici .	11
A.2	Densità e pressione in funzione di $\xi$ . . . . .	14
A.3	Codice . . . . .	15
A.3.1	Codice in linguaggio C . . . . .	15
A.3.2	Script MATLAB per grafici . . . . .	17

---

## Abstract

In questa esercitazione vengono studiate alcune caratteristiche fisiche di una stella di neutroni in funzione della distanza dal suo centro. In particolare vengono inizialmente trovate le relazioni per densità e pressione in un'approssimazione non relativistica, nella quale il corpo celeste è approssimato da un gas omogeneo. Successivamente viene risolta numericamente l'equazione di Lane-Emden per diversi valori dell'indice politropico  $n$ , ovvero un parametro che descrive la relazione tra pressione e densità. Per alcuni valori di  $n$  viene inoltre fatto un confronto con la risoluzione analitica. Infine viene data una stima della massa della stella di neutroni, descritta dall'equazione di L-E, in funzione del suo raggio.

## 1 Stella di neutroni

Una stella di neutroni è una stella compatta formata da materia degenera, la cui componente predominante è costituita da neutroni mantenuti insieme dalla forza di gravità. Tale corpo celeste si può modellizzare mediante l'equazione di Lane-Emden. Si tratta di una forma adimensionale dell'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale di un fluido newtoniano auto-gravitante, politropico e con simmetria sferica. Al fine di ricavare questa equazione, consideriamo la stella come una sfera di massa  $M(r)$ , funzione del raggio  $r$ ; suddividiamola quindi in gusci sferici infinitesimi di massa  $dm = \rho(r)dV$ , dove si sono introdotti la densità di massa  $\rho(r)$  e il volume infinitesimo  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Trascurando le interazioni tra le particelle costituenti la stella che non siano l'interazione gravitazionale, si ha che la forza esercitata tra la massa  $M(r)$  e la corona sferica di massa  $dm$  è data da

$$dF = -G \frac{M(r)dm}{r^2} = -G4\pi M(r)\rho(r)dr,$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. Per la definizione di densità, vale anche

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (1)$$

Vista infine la simmetria del problema, risulta utile ai fini della risoluzione introdurre la pressione superficiale  $P(r)$  che si instaura nelle prossimità della corona circolare considerata:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dF}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (2)$$

## 1.1 Gas omogeneo di fermioni

Al fine di legare la pressione  $P$  alla densità  $\rho$  mediante un'equazione politropica, passo fondamentale per la formulazione dell'equazione di Lane-Emden, trattiamo la stella di neutroni come un gas omogeneo di fermioni, che, per semplicità, consideriamo non interagenti elettromagneticamente, alla temperatura dello zero assoluto. In questo contesto, possiamo introdurre l'energia di Fermi, che è per definizione l'energia del più alto livello energetico occupato in un sistema di fermioni alla temperatura dello zero assoluto. Si consideri una scatola tridimensionale cubica di lato  $L$  (buca di potenziale infinita tridimensionale isotropa, nota come sfera di Fermi). Siano gli stati individuati da tre diversi numeri quantici  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ . Inoltre, sia  $K_F$  il modulo del vettore d'onda massimo fino a cui i fermioni riempiono la sfera di Fermi. Le energie di singola particella sono allora date da

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

dove si può sfruttare la sostituzione  $k_i = (2\pi/L) n_i$ , con  $i = x, y, z$ , così da poter scrivere l'energia totale come

$$E = \sum_k \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2}{2m} k_i^2, \quad (3)$$

dove la somma sui  $k$  è estesa a tutti i livelli energetici contenuti nella sfera di Fermi. Date queste informazioni, si può calcolare il numero totale di fermioni  $N$ :

$$N = \sum_n g_s n_x n_y n_z = g_s \sum_k \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 k_x k_y k_z \simeq g_s \int \frac{V}{(2\pi)^3} d\mathbf{k}, \quad (4)$$

dove  $g_s = 2$  indica la degenerazione di spin per livello energetico. Nell'ultima uguaglianza si è approssimata la sommatoria con un integrale, data l'alta densità di livelli energetici presenti in un gas di fermioni con  $N$  elevato, come può essere quello di una stella di neutroni. Nei passaggi seguenti si effettua un cambio di coordinate, da cartesiane a sferiche, in modo da semplificare i calcoli ed usare propriamente la quantità  $K_F$  introdotta precedentemente. Si giunge a scrivere l'espressione (4) come

$$N = V \frac{4\pi}{(2\pi)^3} 2 \int_0^{K_F} k^2 dk = \frac{V}{3\pi^2} K_F^3.$$

Di conseguenza, considerando la densità  $\rho_N \equiv N/V$  omogenea, possiamo esprimerla come

$$\rho_N = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} 2 \int_0^{K_F} k^2 dk = \frac{K_F^3}{3\pi^2}. \quad (5)$$

Ora si può riscrivere l'energia totale (3), sfruttando la relazione integrale usata in (4), come

$$E = \frac{V4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} 2 \int_0^{K_F} k^2 k^2 dk = \frac{V\hbar^2}{2m\pi^2} \frac{K_F^5}{5} = \frac{V\hbar^2}{10m} (\pi^2)^{2/3} (3\rho_N)^{5/3},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è esplicitato  $K_F$  in funzione di  $\rho_N$  sfruttando la relazione (5). Si può ora trovare la pressione superficiale esercitata dal gas nella sfera di Fermi:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\left[ \frac{\hbar^2}{2m\pi^2} \frac{(3\pi^2\rho_N)^{5/3}}{5} + \frac{\partial E}{\partial\rho_N} \frac{\partial\rho_N}{\partial V} \right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial\rho_N} \frac{\partial\rho_N}{\partial V} = \left( \frac{V\hbar^2}{2m} (3\pi^2\rho_N)^{2/3} \right) \left( -\frac{\rho_N}{V} \right).$$

La pressione risulta quindi

$$P = \frac{\hbar^2}{m} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \rho_N^{5/3}}{5}. \quad (6)$$

Una volta trovata l'espressione della pressione, possiamo ricondurla alla forma delle equazioni politropiche. In astrofisica, un'equazione politropica è una relazione tra la pressione  $P$  e la densità di massa  $\rho$  del tipo

$$P = K \rho^{(1+\frac{1}{n})}, \quad (7)$$

dove  $K$  è una costante di proporzionalità e  $n$  è detto indice politropico. A diversi indici politropici corrispondono diversi modelli astrofisici. Nel nostro caso, la pressione è data dalla relazione (6). Considerando la densità di massa  $\rho = m_n\rho_N$  (con  $m_n$  massa del neutrone), si trova facilmente che l'indice politropico nel nostro caso è  $n = 3/2$  e la costante di proporzionalità  $K$  (che verrà chiamata  $K_{3/2}$  per non essere fraintesa) risulta essere

$$K_{3/2} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m^{8/3}}.$$

Nella nostra trattazione abbiamo assunto trascurabili correzioni relativistiche, che invece porterebbero a scrivere l'energia come

$$E = \frac{V}{\pi^2} \hbar c 2m\pi^2 \frac{K_F^4}{4},$$

con  $c$  velocità della luce nel vuoto, mentre la pressione sarebbe data da

$$P = \frac{\hbar}{4\pi^2} \left( \frac{3\pi^2}{m} \right)^{4/3} \frac{1}{3} \rho^{4/3}.$$

Si verifica che anche questa è un'equazione politropica del tipo (7), con indice  $n = 3$ . L'equivalente dell'equazione (2), nel caso relativistico (considerando la Relatività

Generale), è invece data dall'equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[ \rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[ M(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}.$$

## 1.2 Equazione di Lane-Emden

Ora che si è appurato che la pressione può essere riscritta come un'equazione politropica, si può derivare finalmente l'equazione di Lane-Emden. Partendo dalla relazione (2), si ricava la massa e poi si derivano ambo i membri nella variabile  $r$ , in modo da scrivere

$$M(r) = -\frac{1}{G} \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM(r)}{dr} = -\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right).$$

Ora che nel membro di sinistra dell'ultima relazione si è isolata la derivata della massa  $M$  rispetto a  $r$ , si può sostituire la relazione (1) del guscio di massa sferico in condizione di equilibrio idrostatico, in modo da ottenere

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r).$$

Si sostituisce poi la pressione  $P$  sfruttando l'equazione politropica (7) e, definendo  $\gamma \equiv (1 + 1/n)$  per semplificare la notazione, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d(K\rho^\gamma)}{dr} \right) &= -4\pi G \rho(r), \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} K \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right) &= -4\pi G \rho(r). \end{aligned} \quad (8)$$

L'ultima espressione contiene solo la densità  $\rho$  e la coordinata  $r$ . Si introduce una nuova funzione di  $r$ ,  $\theta(r) \propto P(r)$ , in modo da sfruttare il legame che sussiste tra densità e pressione per l'equazione politropica, esplicito nella seguente relazione:

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \quad (9)$$

dove  $\rho_c$  è la densità nel centro della stella ed è detta per questo densità centrale. Si sostituisce quest'ultima relazione (9) nella (8) e si risolve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho_c \theta^n(r)} K \gamma [\rho_c \theta^n(r)]^{\gamma-1} \frac{d[\rho_c \theta^n(r)]}{dr} \right) &= -4\pi G \rho_c \theta^n(r), \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 K \gamma \rho_c^{\gamma-2} \theta^{n(\gamma-2)}(r) n \theta^{n-1}(r) \frac{d\theta(r)}{dr} \right) &= -4\pi G \theta^n(r), \\ \left[ \frac{(n+1)}{4\pi G} K \rho_c^{\frac{1}{2}-1} \right] \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right) &= -\theta^n(r). \end{aligned} \quad (10)$$

Quella appena trovata è l'equazione di Lane-Emden dimensionale, ma al fine della sua risoluzione numerica è utile ricavarsi la forma adimensionale della stessa equazione. A tale scopo, si introduce la coordinata adimensionale  $\xi$  e si definisce il parametro  $\alpha^2$  pari al contenuto della parentesi quadra nella (10):

$$\xi \equiv \frac{r}{\alpha},$$

$$\alpha^2 \equiv \left[ \frac{(n+1)}{4\pi G} K \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \right].$$

Infine, si introduce la funzione  $\tilde{\theta}(\xi) \equiv \theta(r)$ , in modo da poter scrivere la (10) adimensionalmente come

$$\alpha^2 \frac{1}{(\alpha\xi)^2} \frac{d}{d(\alpha\xi)} \left( (\alpha\xi)^2 \frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d(\alpha\xi)} \right) = -\tilde{\theta}^n(\xi),$$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d\xi} \right) = -\tilde{\theta}^n(\xi).$$

Quest'ultima relazione è l'equazione di Lane-Emden adimensionale. Sotto viene riportata in forma più compatta, vista la sua importanza:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right) = -\tilde{\theta}^n. \quad (11)$$

Essendo un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, per la sua risoluzione in modo univoco richiede due condizioni iniziali. Per alcuni indici politropici ( $n = 0, 1, 5$ ) esiste una soluzione analitica (si veda l'appendice A.1), mentre per tutti gli altri è necessaria un'integrazione numerica.

Si poteva ottenere il medesimo risultato partendo dall'equazione di Poisson, scrivendo l'operatore di Laplace in coordinate sferiche. Data la simmetria radiale del problema, si ha che l'unico contributo del Laplaciano è dato da

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho.$$

Si può sostituire il gradiente del potenziale imponendo l'equilibrio idrostatico, ottenendo

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

che, ripercorrendo il procedimento seguito in precedenza, porta all'equazione di Lane-Emden dimensionale.

Ai fini della risoluzione numerica del problema, si scrive l'equazione differenziale del secondo ordine (11) come un sistema di equazioni differenziali accoppiate del

primo ordine:

$$\begin{cases} \phi(\xi) = \frac{d\tilde{\theta}(\xi)}{d\xi} \\ \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} = -\frac{2}{\xi}\phi(\xi) - \tilde{\theta}^n(\xi) \end{cases} \quad (12)$$

Le condizioni iniziali per la risoluzione dell'equazione (11) sono fissate sulla base di argomenti fisici:

- $\tilde{\theta}(\xi = 0) = 1$ , in modo da garantire la presenza di una densità centrale della stella di neutroni pari a  $\rho_c$ ;
- $\left. \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$ , poiché a  $\xi = 0$ , cioè al centro della stella, non troviamo massa ( $M(r = 0) = 0$ ). Questo fatto si esprime anche con  $\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , dal momento che dai calcoli precedenti si è trovato che  $\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \propto \frac{dP}{dr}$ , in quanto  $P(r) = P_c \theta^{n+1}(r)$ .

### 1.3 Calcolo della massa in approssimazione non relativistica

La massa totale  $M(R)$  della stella modellizzata precedentemente, in funzione del raggio  $R$  della stessa, si può trovare integrando la densità sul volume totale.

Mantenendo la solita assunzione di simmetria radiale per quanto riguarda la densità scriviamo allora

$$M(R) = \int_0^R 4\pi\rho(r)dr$$

Utilizzando le sostituzioni introdotte nella sezione precedente e chiamando  $\bar{\xi}$  il valore per cui  $\tilde{\theta}(\bar{\xi}) = 0$ , si può scrivere

$$M(R) = \int_0^{\bar{\xi}} 4\pi\alpha^3\rho_c\xi^2\tilde{\theta}^n(\xi)d\xi$$

Ora, utilizzando le relazioni (12), possiamo riscrivere  $\xi^2\tilde{\theta}^n d\xi$  come  $-d(\xi^2\phi(\xi))$  e la massa in funzione del raggio  $R$  della stella risulta essere

$$M(R) = - \int_0^{\bar{\xi}} 4\pi\alpha^3\rho_c d(\xi^2\phi(\xi)) = -4\pi\alpha^3\rho_c\bar{\xi}^2\phi(\bar{\xi})$$

A questo punto è immediato ricondursi ad una relazione di cui conosciamo tutti i parametri se teniamo presente che  $\alpha = R/\bar{\xi}$  e dall'equazione politropica

$$\rho_c = \left( K_{3/2} \frac{5}{8\pi G \alpha^2} \right)^3$$

In definitiva la massa di una stella di neutroni di raggio  $R$ , la cui pressione e densità sono date dall'equazione di Lane-Emden, risulta essere

$$M(R) = -4\pi \left( \frac{5K_{3/2}}{8\pi G} \right)^3 \frac{\bar{\xi}}{R^3} \phi(\bar{\xi}) \quad (13)$$



---

## 2 Descrizione del codice utilizzato

Al fine di ricavare delle soluzioni numeriche del sistema di equazioni (12) per alcuni valori dell'indice politropico  $n$ , si è realizzato un programma in linguaggio C che implementa il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (RK4). Tale algoritmo, date le funzioni  $\tilde{\theta}$  e  $\phi$  calcolate nel punto  $\xi_i$  (indicate con  $\tilde{\theta}_i$  e  $\phi_i$  rispettivamente), permette di calcolarle nel punto  $\xi_{i+1} \equiv \xi_i + h$ , dove  $h > 0$  è il passo d'integrazione. A tale scopo, vengono calcolate sequenzialmente le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
 K_1 &\equiv h F(\xi_i, \tilde{\theta}_i, \phi_i), & H_1 &\equiv h \phi_i, \\
 K_2 &\equiv h F(\xi_i + \frac{h}{2}, \tilde{\theta}_i + \frac{H_1}{2}, \phi_i + \frac{K_1}{2}), & H_2 &\equiv h (\phi_i + \frac{K_1}{2}), \\
 K_3 &\equiv h F(\xi_i + \frac{h}{2}, \tilde{\theta}_i + \frac{H_2}{2}, \phi_i + \frac{K_2}{2}), & H_3 &\equiv h (\phi_i + \frac{K_2}{2}), \\
 K_4 &\equiv h F(\xi_{i+1}, \tilde{\theta}_i + H_3, \phi_i + K_3), & H_4 &\equiv h (\phi_i + K_3),
 \end{aligned}$$

dove si è definita

$$F(\xi, \tilde{\theta}, \phi) \equiv -\frac{2}{\xi} \phi - \tilde{\theta}^n. \quad (14)$$

Infine, le quantità  $\phi_{i+1}$  e  $\tilde{\theta}_{i+1}$  cercate sono date da

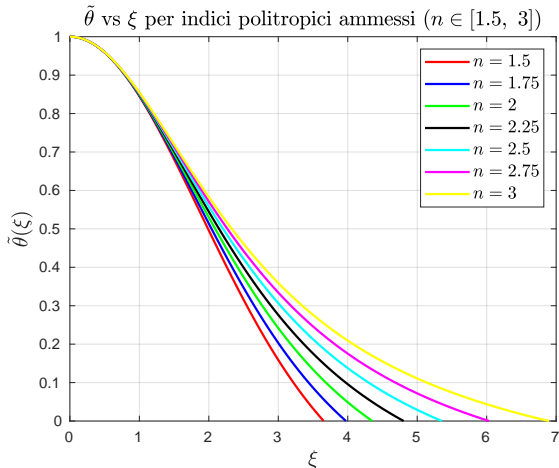
$$\begin{aligned}
 \phi_{i+1} &= \phi_i + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) + \mathcal{O}(h^5), \\
 \tilde{\theta}_{i+1} &= \tilde{\theta}_i + \frac{1}{6} (H_1 + 2H_2 + 2H_3 + H_4) + \mathcal{O}(h^5).
 \end{aligned}$$

La struttura del programma realizzato è molto semplice: la funzione principale *main* richiama ciclicamente la funzione *new\_theta\_phi*, incaricata di eseguire un passo dell'algoritmo RK4, calcolando  $\tilde{\theta}_{i+1}$  e  $\phi_{i+1}$  date  $\tilde{\theta}_i$  e  $\phi_i$ . I valori iniziali  $\tilde{\theta}_0$  e  $\phi_0$  sono dati dalle condizioni iniziali  $\tilde{\theta}(0) = 1$  e  $\phi(0) = 0$ . Come valore iniziale di  $\xi$  si considera invece  $10^{-10}$ , anziché esattamente zero, al fine di evitare di dividere per zero nel calcolare la (14) alla prima iterazione. Il ciclo viene eseguito per ciascun valore di  $n$  scelto e si interrompe quando è verificata la condizione  $\tilde{\theta}_i \leq 0$ , nel caso di  $n \in [1.5, 3]$ , oppure quando  $\xi_i > XI\_MAX$  (dove *XI\_MAX* è una costante fissata), nel caso di  $n \notin [1.5, 3]$ . Inoltre, nel caso di  $n = 3/2$ , allo scopo di individuare con maggiore precisione il punto  $\bar{\xi}$  tale che  $\tilde{\theta}(\bar{\xi}) = 0$ , il passo d'integrazione  $h$ , inizialmente posto uguale alla costante *H\_INI*, viene ridotto alla costante *H\_FIN*  $<$  *H\_INI*, quando è verificata la condizione  $\tilde{\theta}_i < THETA\_SOGLIA$  (dove anche *THETA\_SOGLIA* è una costante fissata).

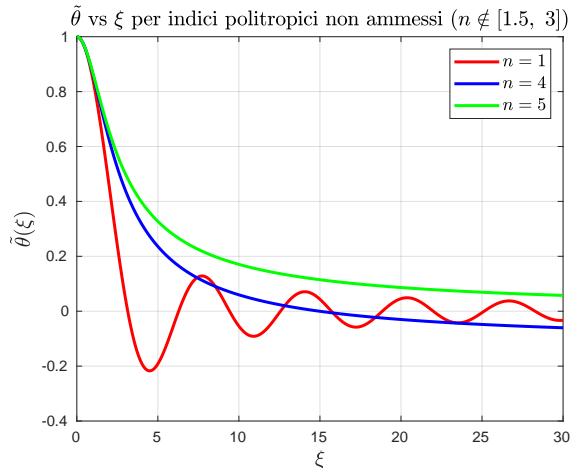
I risultati ottenuti per ogni  $n$  vengono salvati in un file di testo per la successiva elaborazione mediante l'ambiente MATLAB, con cui vengono tracciati alcuni grafici significativi. In particolare, nel caso di  $n = 3/2$ , viene graficata la massa  $M$  della stella in funzione del suo raggio  $R$ , sfruttando la relazione (13) e il valore  $\bar{\xi}$  trovato. Il codice completo, compreso lo script MATLAB, è riportato in Appendice A.3.

### 3 Discussione dei risultati e confronto con la teoria

Inizialmente viene risolta la coppia di equazioni differenziali (12) per 7 valori dell'indice politropico  $n$  equidistanti nell'intervallo  $[1.5, 3]$ . Successivamente viene fatto lo stesso con 3 valori di  $n$  fuori da questo intervallo. Nella coppia di grafici seguente (Fig. 1 e 2) è rappresentata la soluzione  $\tilde{\theta}(\xi)$  per ognuno di questi valori. Si vede che



**Figura 1:** Soluzione numerica  $\tilde{\theta}(\xi)$  per  $n \in [1.5, 3]$ .



**Figura 2:** Soluzione numerica  $\tilde{\theta}(\xi)$  per  $n \notin [1.5, 3]$ .

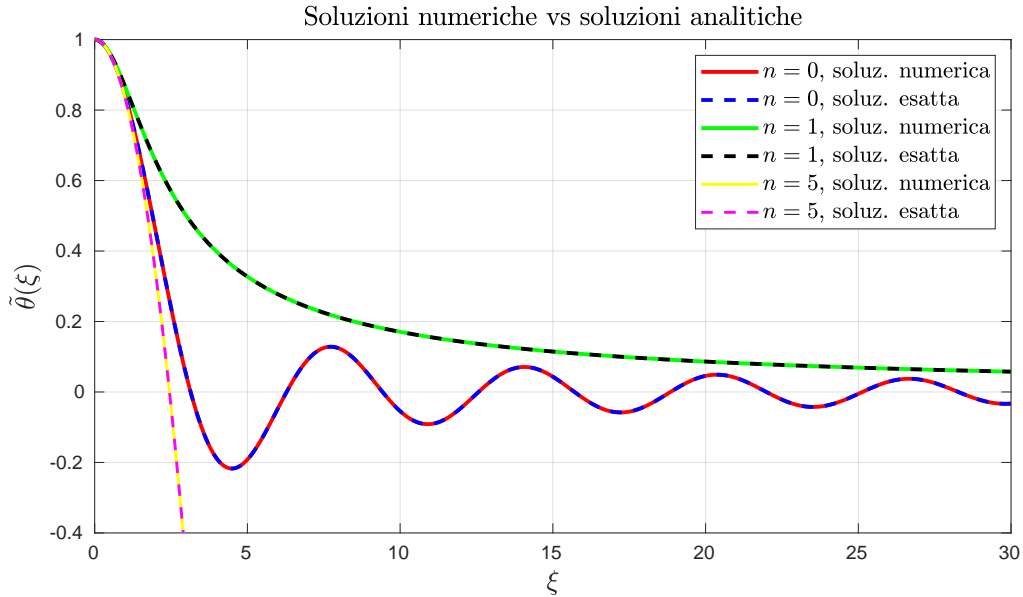
in entrambi i casi la funzione parte da  $\tilde{\theta}(0) = 1$  (condizione iniziale fissata) per poi diminuire progressivamente verso lo 0 all'aumentare di  $\xi$ . C'è però una differenza tra i valori nei due intervalli. Per i valori ammessi, infatti, lo zero viene raggiunto in un intervallo di  $\xi$  compreso tra 3.5 e 7. Questo vuol dire che pressione e densità, proporzionali a  $\tilde{\theta}$ , si annullano per dei corrispondenti valori di  $r$ .

Nell'appendice A.2 si possono trovare i relativi grafici di  $\rho(\xi)$  e  $P(\xi)$  normalizzati sui loro rispettivi valori centrali. Ricordiamo che la relazione tra  $r$  e  $\xi$  è fissata da  $\alpha$ , che a sua volta dipende da  $\rho_c$ , parametro sperimentale. Quello che accade è che si osservano stelle di neutroni con raggio compreso tra 9 km e 13 km, quindi il valore di  $\xi$  per cui si annullano densità e pressione deve essere in accordo con queste osservazioni (confermate peraltro dalla trattazione ultra-relativistica). Se il raggio della stella risultasse più grande, o più piccolo, dell'intervallo sopracitato, essa collapserebbe oppure esploderebbe. Questo fatto può essere visto in particolare nel caso in cui  $n = 1$ , dove  $\tilde{\theta}(\xi)$  risulta avere delle oscillazioni smorzate con valor medio  $\tilde{\theta}(\xi) = 0$ . È altresì doveroso notare che l'instabilità di sfere di gas con indice politropico  $n \notin [1.5, 3]$  rispetto a perturbazioni di pressione e volume è una conseguenza diretta dell'equazione di Lane-Emden<sup>1</sup>.

Come conferma della bontà del codice scritto per la risoluzione numerica dell'equazione di Lane-Emden è stato fatto un confronto con alcune soluzioni analitiche. Come già anticipato, i 3 valori per cui esiste una soluzione esatta sono  $n = 0, 1$  e  $5$ : il procedimento per la risoluzione delle tre equazioni si trova nell'appendice A.1.

<sup>1</sup>Una trattazione matematica della stabilità si può trovare ad esempio in WB Bonnor. *Stability of polytropic gas spheres*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1958.

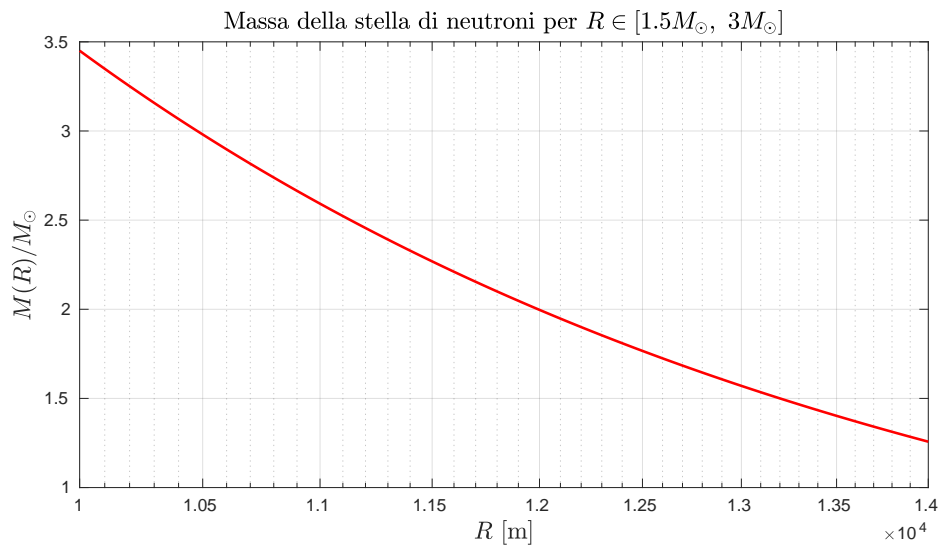
Nel grafico seguente (Fig.6) è presente un confronto tra la risoluzione numerica ed esatta dell'equazione (11) per questi valori di indice politropico. Dal grafico si può



**Figura 3:** Confronto tra le soluzioni numeriche ed analitiche per alcuni valori di  $n$ .

notare come ci sia una completa sovrapposizione tra i due tipi di soluzione per tutti gli  $n$ . Osserviamo inoltre che con la precisione (arbitraria) da noi fissata attraverso il parametro  $H\_INI = 0.001$ , le due soluzioni risultano identiche fino alla quinta cifra significativa.

Dalla teoria relativistica e dalle osservazioni sperimentali emerge che il valore della massa per una stella di neutroni oscilla tra 1.5 e 3 volte la massa del Sole  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$  kg. Sfruttando l'equazione (13), si può trovare allora il valore teorico del raggio di stelle di neutroni con questa massa (Fig.4). Si osserva che



**Figura 4:** Massa della stella in funzione del suo raggio  $R$ , la scala delle ascisse è logaritmica per una migliore visualizzazione.

---

l'intervallo cercato corrisponde ad un raggio compreso tra 10.5 km e poco più di 13 km. Alla luce di quanto esposto poco sopra notiamo che questi valori risultano essere in accordo con quelli aspettati per il raggio di stelle di neutroni. Non c'è però da stupirsi se la curva proporzionale all'inverso del cubo del raggio, data dalla (13), non corrisponde a quella osservata sperimentalmente, molto più complicata. D'altronde la trattazione utilizzata è estremamente semplificativa e non tiene conto di effetti relativistici e quantistici tutt'altro che trascurabili.

---

## A Appendice

### A.1 Risoluzione analitica dell'equazione di Lane-Emden in casi semplici

L'equazione di Lane-Emden (rif.) ammette soluzioni analitiche per soli tre valori di  $n$ : 0, 1 e 5.

- Per  $n = 0$ , l'equazione si riduce a

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right) + 1 = 0 \iff \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right) = -\xi^2.$$

Integrando ambo i membri, si ottiene

$$\xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} = -\frac{\xi^3}{3} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Dividendo entrambi i membri per  $\xi^2$  ed integrando nuovamente, si trova

$$\tilde{\theta}(\xi) = -\frac{\xi^2}{6} - \frac{C_1}{\xi} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali  $\tilde{\theta}(0) = 1$ ,  $\left. \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$ , si ottiene  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ . Dunque la soluzione è

$$\tilde{\theta}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}.$$

- Per  $n = 1$ , invece, l'equazione di Lane-Emden diventa

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right) + \tilde{\theta} = 0,$$

da cui, calcolando la derivata nel membro di sinistra, si ottiene

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} + \tilde{\theta} = 0. \tag{15}$$

Assumiamo che la soluzione si possa scrivere nella forma

$$\tilde{\theta}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k, \tag{16}$$

dove gli  $a_k$  sono coefficienti reali da determinare. Sostituendo la serie di

potenze nell'equazione (15), si trova

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k k(k-1) \xi^{k-2} + \frac{2}{\xi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k \xi^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi^k = 0,$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [(a_{k+2}(k+2)(k+1) + 2a_{k+2}(k+2) + a_k) \xi^k] = 0.$$

Affinché valga l'uguaglianza, deve essere

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+3)}. \quad (17)$$

Imponendo le solite condizioni iniziali, si trova  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 0$ . Di conseguenza, sfruttando la relazione (17), la serie di potenze (16) diventa

$$\tilde{\theta}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \xi^{2k}.$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor di  $\sin(x)$ , si trova infine

$$\tilde{\theta}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}.$$

- Infine, per  $n = 5$ , l'equazione di Lane-Emden diventa

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} \right) + \tilde{\theta}^5 = 0. \quad (18)$$

Introduciamo le nuove variabili  $z$ ,  $t$  e  $x$ , nelle trasformazioni di Emden, utilizzando le definizioni

$$\xi \equiv \frac{1}{x} \equiv e^{-t}; \quad \theta \equiv \left( \frac{x}{2} \right)^{1/2} \quad z \equiv \left( \frac{1}{2} e^t \right)^{1/2} z.$$

L'equazione per  $n = 5$  allora diventa

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{4} z(1 - z^4).$$

Ora, moltiplicando entrambi i termini di quest'ultima per  $dz/dt$ , si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{4} z(1 - z^4) \frac{dz}{dt}.$$

Integrando l'equazione precedente, si ottiene

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{24} z^6 + D,$$

con  $D$  costante di integrazione. Per  $z \rightarrow \pm\infty$  si ha  $(dz/dt)^2 \rightarrow -\infty$ , il che è impossibile essendo  $dz/dt$  reale. Possiamo allora riscrivere

$$\frac{dz}{\pm[2D + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{12}z^6]^{1/2}} = dt,$$

con  $z$  che può variare al massimo tra la radice più grande e più piccola dell'equazione

$$2D + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{12}z^6 = 0.$$

Assumendo le solite condizioni iniziali, si ha che  $D = 0$  e il segno da utilizzare è quello per cui  $t \rightarrow \infty$ . Allora, usando la sostituzione  $1/3z^4 = \sin^2 \zeta$ , l'equazione di partenza si riscrive

$$\frac{dz}{z(1 - \frac{1}{3}z^4)^{1/2}} = -\frac{1}{2}dt \quad \implies \quad \operatorname{cosec}(\zeta)d\zeta = -dt.$$

Si nota infatti che vale

$$4 \frac{dz}{z} = 2 \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} d\zeta. \quad (19)$$

Integrando l'equazione così espressa una seconda volta, si ha

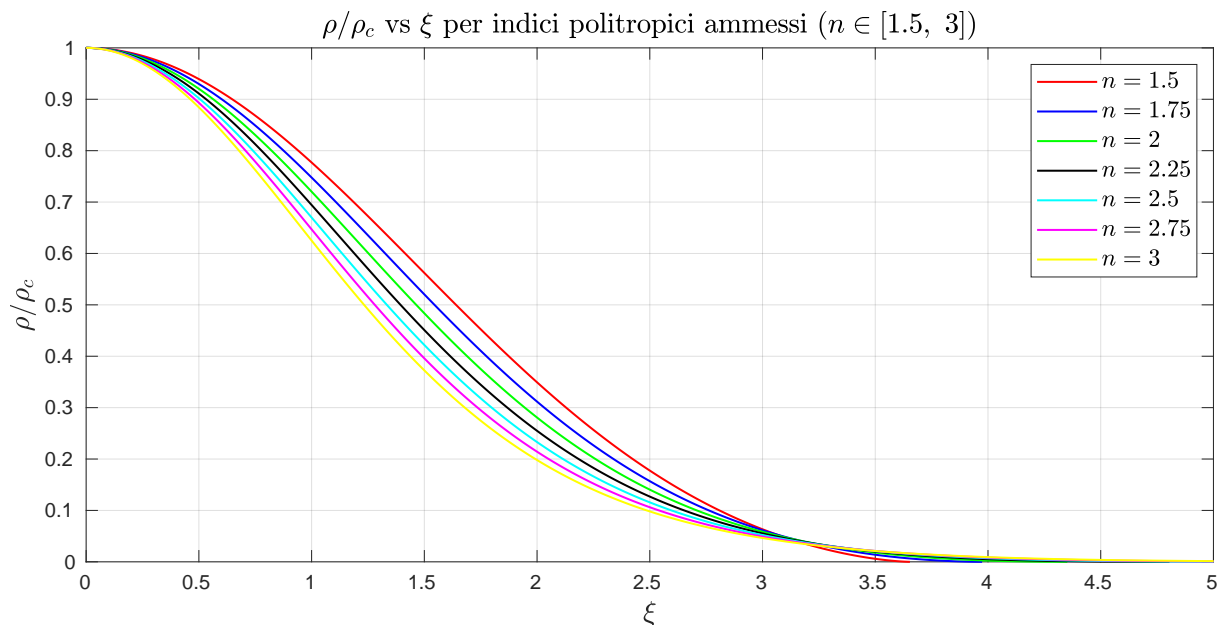
$$\tan \left( \frac{1}{2} \zeta \right) = C e^{-t},$$

con  $C$  costante d'integrazione. A questo punto è necessario risostituire le variabili con quelle originarie per ottenere la soluzione finale

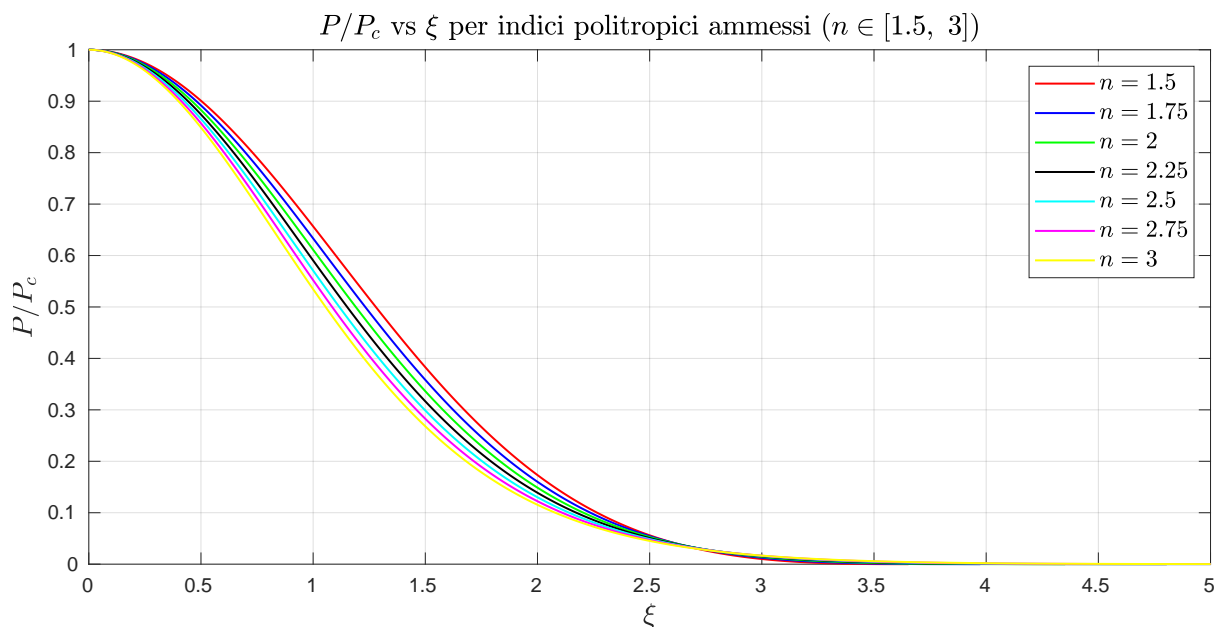
$$\tilde{\theta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2/3}}.$$

## A.2 Densità e pressione in funzione di $\xi$

Grafici di densità e pressione, ricavati a partire dalla soluzione numerica di  $\tilde{\theta}(\xi)$ . Da notare la normalizzazione rispetto ai valori centrali, ricordiamo infatti  $\rho = \rho_c \tilde{\theta}^n(\xi)$  e  $P = P_c \tilde{\theta}^{n+1}(\xi)$ .



**Figura 5:** Densità, normalizzata sulla densità centrale  $\rho_c$ , in funzione di  $\xi$  per alcuni valori ammessi di  $n$ .



**Figura 6:** Pressione, normalizzata sulla pressione centrale  $P_c$ , in funzione di  $\xi$  per alcuni valori ammessi di  $n$ .



## A.3 Codice

Di seguito sono riportati codice e script utilizzati rispettivamente per la parte di risoluzione numerica e per la parte grafica.

### A.3.1 Codice in linguaggio C

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 // Costanti
6 #define H_INI 0.001 // Passo d'integrazione iniziale
7 #define H_FIN 0.00001 // Passo d'integrazione ridotto per
   meglio stimare xi t.c. theta(xi) = 0 (per n = 1.5)
8 #define THETA_SOGLIA 0.001 // Soglia per theta sotto cui
   ridurre passo d'integrazione (per n = 1.5)
9 #define THETA_0 1 // theta iniziale
10 #define PHI_0 0 // phi iniziale
11 #define XI_0 0.0000000001 // xi iniziale
12 #define XI_MAX 30 // Massimo valore di xi considerato
13 #define LUN 11 // Lunghezza del vettore "N"
14 const double N[LUN] = {1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 1, 4,
   5, 0}; // Valori dell'indice n considerati
15
16 // Prototipi funzioni
17 double new_theta_phi(short);
18
19 // Variabili globali
20 double theta;
21 double phi;
22 double xi;
23 double h; // Passo d'integrazione
24
25
26 int main(){
27     // File per salvataggio dati
28     FILE *file;
29     file = fopen("C:\\Users\\Admin\\Documents\\MATLAB\\
   esercizio2_260320.txt", "w");
30
31     short i;
32
33     // Ciclo sui valori di n contenuti nel vettore "N"
34     for(i = 0; i < LUN; i++){
35         // Condizioni iniziali
36         theta = THETA_0;
```

```

37     phi = PHI_0;
38     xi = XI_0;
39
40     // Passo d'integrazione
41     h = H_INI;
42
43     printf("n = %1.2f\n\n", N[i]);
44     printf("Xi\t\tTheta\t\tPhi\n");
45     fprintf(file, "%f %d %d\n", N[i], 0, 0);
46
47     while((theta >= 0 && !(N[i] < 1.5 || N[i] > 3)) || (xi
48         <= XI_MAX && (N[i] < 1.5 || N[i] > 3))){
49         printf("%f\t%f\t%f\n", xi, theta, phi);
50         fprintf(file, "%f %f %f\n", xi, theta, phi);
51
52         new_theta_phi(i); // Passo dell'algoritmo RK4
53
54         // Condizione per ridurre passo d'integrazione
55         if(N[i] == 1.5 && theta < THETA_SOGLIA && h ==
56             H_INI)
57             h = H_FIN;
58     }
59
60     printf("\n-----\n\n");
61 }
62
63 fclose(file);
64
65 return 0;
66 }
67
68 double new_theta_phi(short index){
69     double k1, k2, k3, k4; // Per phi
70     double h1, h2, h3, h4; // Per theta
71
72     // Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (RK4)
73     k1 = -h * (2 / xi * phi + pow(theta, N[index]));
74     h1 = h * phi;
75     k2 = -h * (2 / (xi + h / 2) * (phi + k1 / 2) + pow(theta +
76         h1 / 2, N[index]));
77     h2 = h * (phi + k1 / 2);
78     k3 = -h * (2 / (xi + h / 2) * (phi + k2 / 2) + pow(theta +
79         h2 / 2, N[index]));
80     h3 = h * (phi + k2 / 2);

```

```
78     k4 = -h * (2 / (xi + h) * (phi + k3) + pow(theta + h3, N[
        index]));
79     h4 = h * (phi + k3);
80
81     // Nuovi valori di phi, theta e xi
82     phi += (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
83     theta += (h1 + 2 * h2 + 2 * h3 + h4) / 6;
84     xi += h;
85 }
```

### A.3.2 Script MATLAB per grafici

```
1 close all;
2 format long;
3 colors = 'rbgkcmrybgkcmr';
4
5 %% Caricamento dati
6 dati = importdata('esercizio2_260320.txt');
7
8 %% Grafici theta(xi)
9 %% n permessi
10 fig_theta = figure();
11 hold on;
12 grid on;
13 box on;
14 fig_P = figure();
15 hold on;
16 grid on;
17 box on;
18 fig_ro = figure();
19 hold on;
20 grid on;
21 box on;
22 i = 0;
23 labels = {};
24 for j = 1:length(dati(:, 1))
25     if (dati(j, 2) == 0) && (dati(j, 3) == 0)
26         i = i + 1;
27         n = dati(j, 1);
28         if n < 1.5 || n > 3
29             break;
30         end
31         xi = [];
32         theta = [];
```

```

33     labels = [labels, ['$n = ' num2str(n) '$']];
34     else
35     xi = [xi; dati(j,1)];
36     theta = [theta; dati(j,2)];
37
38     if (j+1 > length(dati(:, 1))) || (dati(j+1, 2) == 0 &&
39         dati(j+1, 3) == 0)
40         if n == 1.5
41             phi_bar = dati(j, 3);
42             xi_bar = dati(j, 1);
43         end
44         P = theta.^(n+1);
45         ro = theta.^n;
46         figure(fig_theta);
47         plot(xi, theta, colors(i), 'LineWidth', 1.5);
48         figure(fig_P);
49         plot(xi, P, colors(i), 'LineWidth', 1);
50         figure(fig_ro);
51         plot(xi, ro, colors(i), 'LineWidth', 1);
52     end
53 end
54 figure(fig_theta);
55 tt = title('$\tilde{\theta}$ vs $\xi$ per indici politropici
56 ammessi ($n \in [1.5, \ 3]$)', 'Interpreter', 'latex');
57 xx = xlabel('$\xi$', 'Interpreter', 'latex');
58 yy = ylabel('$\tilde{\theta}(\xi)$', 'Interpreter', 'latex');
59 ll = legend(labels);
60 set(xx, 'FontSize', 14);
61 set(yy, 'FontSize', 14);
62 set(ll, 'Interpreter', 'latex');
63 set(ll, 'FontSize', 12);
64 set(tt, 'FontSize', 14);
65
66 figure(fig_P);
67 tt = title('$P / P_c$ vs $\xi$ per indici politropici ammessi
68 ($n \in [1.5, \ 3]$)', 'Interpreter', 'latex');
69 xx = xlabel('$\xi$', 'Interpreter', 'latex');
70 yy = ylabel('$P / P_c$', 'Interpreter', 'latex');
71 ll = legend(labels);
72 set(xx, 'FontSize', 14);
73 set(yy, 'FontSize', 14);
74 set(ll, 'Interpreter', 'latex');
75 set(ll, 'FontSize', 12);
76 set(tt, 'FontSize', 14);
77 xlim([0, 5]);

```

```
76
77 figure(fig_ro);
78 tt = title('\rho / \rho_c$ vs $\xi$ per indici politropici
           ammessi ($n\in[1.5,\ 3]$)', 'Interpreter', 'latex');
79 xx = xlabel('\xi$', 'Interpreter', 'latex');
80 yy = ylabel('\rho / \rho_c$', 'Interpreter', 'latex');
81 ll = legend(labels);
82 set(xx, 'FontSize', 14);
83 set(yy, 'FontSize', 14);
84 set(ll, 'Interpreter', 'latex');
85 set(ll, 'FontSize', 12);
86 set(tt, 'FontSize', 14);
87 xlim([0, 5]);
88
89 %% n non permessi e confronto con soluzioni analitiche per n =
           0, 1, 5
90 fig_n_cattivi = figure();
91 hold on;
92 grid on;
93 box on;
94 fig_confronto = figure();
95 hold on;
96 grid on;
97 box on;
98
99 i = 0;
100 labels = {};
101 labels_conf = {};
102 for j = j:length(dati(:, 1))
103     if (dati(j, 2) == 0) && (dati(j, 3) == 0)
104         i = i + 1;
105         n = dati(j, 1);
106         if n == 0
107             break;
108         end
109         xi = [];
110         theta = [];
111         labels = [labels, ['$n = ' num2str(n) '$']];
112     else
113         xi = [xi; dati(j,1)];
114         theta = [theta; dati(j,2)];
115
116         if (j+1 > length(dati(:, 1))) || (dati(j+1, 2) == 0 &&
           dati(j+1, 3) == 0)
117             figure(fig_n_cattivi);
118             plot(xi, theta, colors(i), 'LineWidth', 2);
```

```

119
120         if n == 1 || n == 5
121             labels_conf = [labels_conf, ['$n = ' num2str(n
122                 ) '$, soluz. numerica']];
123             figure(fig_confronto);
124             plot(xi, theta, colors(i), 'LineWidth', 2);
125             xi_e = (0:0.01:xi(end))';
126             if n == 1
127                 theta_e = sin(xi_e) ./ xi_e;
128             else
129                 theta_e = (1 + xi_e.^2 / 3).^(-1/2);
130             end
131             plot(xi_e, theta_e, ['--' colors(i+1)], '
132                 LineWidth', 2);
133             labels_conf = [labels_conf, ['$n = ' num2str(n
134                 ) '$, soluz. esatta']];
135         end
136     end
137 end
138
139 figure(fig_n_cattivi);
140 tt = title('$\tilde{\theta}$ vs $\xi$ per indici politropici
141     non ammessi ($n \notin [1.5, 3]$)', 'Interpreter', 'latex');
142 xx = xlabel('$\xi$', 'Interpreter', 'latex');
143 yy = ylabel('$\tilde{\theta}(\xi)$', 'Interpreter', 'latex');
144 ll = legend(labels);
145 set(xx, 'FontSize', 14);
146 set(yy, 'FontSize', 14);
147 set(ll, 'Interpreter', 'latex');
148 set(ll, 'FontSize', 12);
149 set(tt, 'FontSize', 14);
150
151 figure(fig_confronto);
152 hold on;
153 xi = dati(j+1:end, 1);
154 theta = dati(j+1:end, 2);
155 xi_e = (0:0.01:xi(end))';
156 theta_e = 1 - xi_e.^2 / 6;
157 plot(xi, theta, 'y', 'LineWidth', 1.5);
158 plot(xi_e, theta_e, '--m', 'LineWidth', 1.5);
159 labels_conf = ['$n = 0$, soluz. numerica', '$n = 0$, soluz.
160     esatta', labels_conf];
161 tt = title("Soluzioni numeriche vs soluzioni analitiche", '
162     Interpreter', 'latex');
163 xx = xlabel('$\xi$', 'Interpreter', 'latex');

```

```

159 yy = ylabel('$\tilde{\theta}(\xi)$', 'Interpreter', 'latex');
160 ll = legend(labels_conf);
161 set(xx, 'FontSize', 14);
162 set(yy, 'FontSize', 14);
163 set(tt, 'FontSize', 14);
164 set(ll, 'Interpreter', 'latex');
165 set(ll, 'FontSize', 12);
166 ylim([-0.4 1]);
167 xlim([0 30])
168
169 %% Grafico massa vs raggio: M(R)
170 % Costanti
171 G = 6.67408 * 10^(-11); % [m^3 / (kg s^2)] Costante di
    gravitazione universale
172 h_bar = 6.62607015 * 10^(-34) / (2 * pi); % [J s] h tagliato
173 m_n = 1.674927351 * 10^(-27); % [kg] Massa del neutrone
174 M_sole = 1.989e30; % [kg] Massa solare
175
176 R = (25*10^3:0.1:37*10^3)';
177
178 xi_bar=3.65375; phi_bar = -0.203302;
179 k = h_bar^2 * ((3 * pi^2)^(2/3)) / (5 * m_n^(8/3));
180 M = (-4 .* pi ./ R.^3 .* xi_bar.^5 .* phi_bar .* (5.*k./8./G./
    pi).^3) ./ M_sole;
181
182 figure();
183 grid on;
184 hold on;
185 box on;
186 plot(R, M, 'r', 'LineWidth', 1.5);
187 set(gca, 'Xscale', 'log');
188 xx = xlabel('$R$ [m]', 'Interpreter', 'latex');
189 yy = ylabel('$M(R) / M_{\odot}$', 'Interpreter', 'latex');
190 tt = title("Massa della stella di neutroni per $R$ in [1.5M_{\odot}, \ 3M_{\odot}]$", 'Interpreter', 'latex');
191 set(xx, 'FontSize', 14);
192 set(yy, 'FontSize', 14);
193 set(tt, 'FontSize', 14);

```