

Seconda esperienza di laboratorio - Relazione

Gruppo L12

Dal Farra Filippo, Garbi Luca, Libardi Gabriele

Aprile 2018

Contents

1	Abstract	3
2	Materiali:	4
3	Procedure di misura	4
4	Analisi dei dati	6
4.1	Misurazione statica	6
4.2	Misurazione dinamica	14

1 Abstract

Tra gli scopi di questa esperienza il principale è quello di mettere in relazione l'osservazione di un fenomeno fisico con un modello matematico che lo descriva, effettuando quindi un passaggio dalla misurazione di grandezze fisiche all'enunciazione di una legge fisica (quella di Hooke nella fattispecie).

In particolare nella prima parte si farà una stima della costante elastica k di una molla a partire dall'allungamento della stessa in funzione della massa che le viene applicata. Di preciso si verrà alla conclusione che è possibile mettere in relazione la forza applicata ad una molla e il suo allungamento tramite una legge lineare.

Nella seconda parte invece verrà preso in considerazione il periodo di oscillazione di una molla in funzione dei pesi applicati. Anche qui si studierà se sia possibile introdurre una relazione, lineare o di altro tipo, tra le grandezze misurate.

Si utilizzerà la regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati per cercare una possibile linearità tra i dati, verrà introdotta la media pesata per trovare un valore centrale nei dati pesando le varie incertezze e in più verrà eseguito il test del χ^2 per verificare che effettivamente la legge teorica sia coerente con i dati sperimentali.

2 Materiali:

- Molla a trazione;
- Supporto verticale per la sospensione della molla con asta di misura scorrevole (risoluzione di lettura 1 mm);
- Piattello portapesi e pesi cilindrici di massa variabile;
- Bilancia elettronica (risoluzione di lettura 0.1 g);
- Cronometro digitale (risoluzione di lettura 0.01 s).

3 Procedure di misura

Per la misura statica della deformazione elastica di una molla, è stata appesa un'estremità della molla ad un supporto verticale dotato di un'asta millimetrata, mentre all'altro capo è stato appeso un portapesetti dove vengono caricati i pesi. Per migliorare la misurazione si è allineato il fondo del supporto porta peso con una tacca dell'asta millimetrata, in modo da ottenere una lettura dell'allungamento più comoda possibile. La risoluzione dell'asta millimetrata è da un lato 1 mm .

Si è scelto di misurare la deformazione elastica per un set di pesi che variavano la loro massa per circa 5 g , in particolare sono state misurate le deformazioni elastiche di 20 pesi. Ogni misura dell'allungamento della molla è stato preso leggendo il valore sull'asta millimetrata, dove il fondo del supporto si fermava. Una volta aggiunto il peso sul supporto, prima di prendere una misura si aspetta che la molla finisca di oscillare in modo da ridurre gli errori di lettura.

Alla fine dell'acquisizione dei dati si è ripetuta la misura per alcuni pesi per verificare la ripetibilità dell'esperimento.

Per la misura dinamica delle caratteristiche di deformazione elastica della stessa molla si è usato il medesimo supporto delle misure statiche. In particolare una volta aggiunto il peso, si è trazionata la molla di pochi centimetri (per evitare che il porta pesi o la molla stessa si stacchino a causa di un movimento troppo ampio) e poi rilasciata, una volta che la molla inizia ad oscillare stabilmente vengono cronometrati i periodi con un cronometro centesimale. Per le misure dei periodi delle oscillazioni si è scelto di fare 11 set di misure di masse differenti che variano circa di 5 g l'una dall'altra, a partire dai 75.2 g fino a 126.5 g . In ogni set sono state fatte 5 misure del periodo di 10 oscillazioni complessive. In più per ottenere risultati più consistenti si è scelto di far misurare tutte le misure allo stesso operatore, in particolare quello che nello scorsa esperienza aveva ottenuto la deviazione standard minore sui periodi.

4 Analisi dei dati

L'analisi dei dati sarà suddivisa in due parti, nella prima si terrà conto delle misure statiche della molla mentre nella seconda si commenteranno le misure dinamiche.

4.1 Misurazione statica

La massa applicata alla molla viene incrementata nominalmente di 5 g per misurazione, da un minimo nominale di 25 g , che rappresenta la massa stessa del portapesetti, che verrà considerato parte integrante della molla, per un totale di $N = 20$ misurazioni.

Chiamata la grandezza z_i la posizione sul metro a nastro, definisco x_i l'allungamento cioè la differenza di posizioni $z_0 - z_i$.

Chiamo P_i il peso della massa i -esima con incertezza $\sigma[P_i] = g\sigma[m_i]$. Data la legge per la propagazione di incertezze sulla somma di grandezze (1) ottengo un valore di $\sigma[x_i]$.

$$\sigma[x_i] = \sqrt{(\sigma[z_0])^2 + (\sigma[z_i])^2} = \sqrt{2}\sigma[z] = 4 \times 10^{-4}\text{ m} \quad (1)$$

Per ridurre ulteriormente l'incertezza di misurazione si è scelto di allineare il fondo del porta piattelli con una tacca del metro a nastro in modo da avere $z_0 = 0.4000 \pm 0.0003\text{ m}$, tuttavia viene tenuto un valore di $\sigma[x_i]$ invariato come mostrato di seguito:

$$\sigma[x_i] = 0.0004\text{ m}$$

$$\sigma[P_i] = 0.0003\text{ N}$$

	Min	Max
m_i	0 g	101.3 g
x_i	0 mm	102.5 mm

Nel grafico 1 vengono rappresentati i valori di allungamento x_i in funzione della forza applicata P_i con le relative incertezze. Si nota

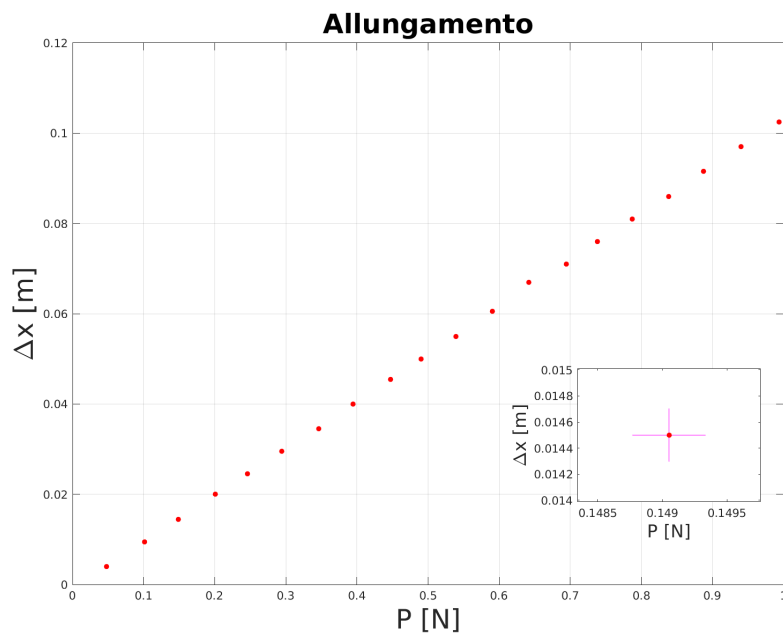


Figure 1: Grafico errorbar degli allungamenti

quindi una buona compatibilità delle grandezze con la legge di Hooke (2).

$$x_i = P_i/k \quad (2)$$

Si è calcolato quindi il valore $k_i = P_i/x_i$ per ogni coppia peso-allungamento con relativo valore di incertezza dato dalla formula di propagazione delle incertezze (3), e il risultato è mostrato nel grafico 2.

$$\sigma[k_i] = |k_i| \sqrt{\left(\frac{\sigma[P_i]}{P_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[x_i]}{x_i}\right)^2} \quad (3)$$

Dato che gli allungamenti, soprattutto per valori piccoli, sono più comparabili con l'incertezza di risoluzione (rapporto $\sigma[x_i]/x_i$ maggiore) rispetto ai pesi con il loro $\sigma[P_i]$, si deduce che $\sigma[k_i]$ dipenda

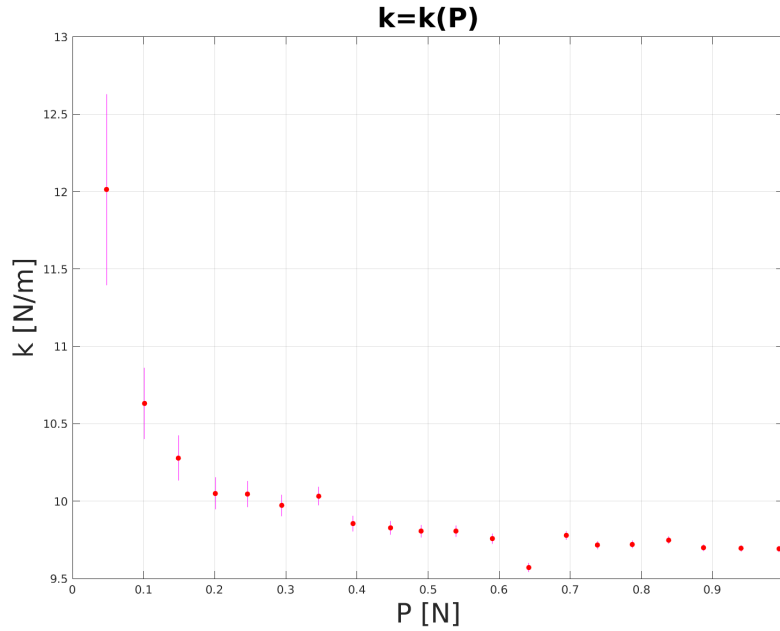


Figure 2: Dipendenza della costante elastica da P.

molto di più dall'incertezza sul metro a nastro come si può vedere dal grafico 3 rendendo quindi, nelle ipotesi citate, praticamente trascurabile l'apporto dell'incertezza sulla misurazione del peso.

Si procede quindi all'ottenimento di un valore $k_0 \pm \sigma[k]$ preferito date le misurazioni effettuate.

Dato che i $\sigma[k_i]$ sono dipendenti dalle misurazioni effettuate è giusto non trattare tutti i k_i allo stesso modo ma applicarci un peso inversamente proporzionale al quadrato dell'incertezza di ciascuno con una media pesata.

$$k_w = \frac{\sum k_i w_i}{\sum w_i}, \quad \sigma[k] = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}, \quad \text{con } w_i = \frac{1}{(\sigma[k_i])^2}$$

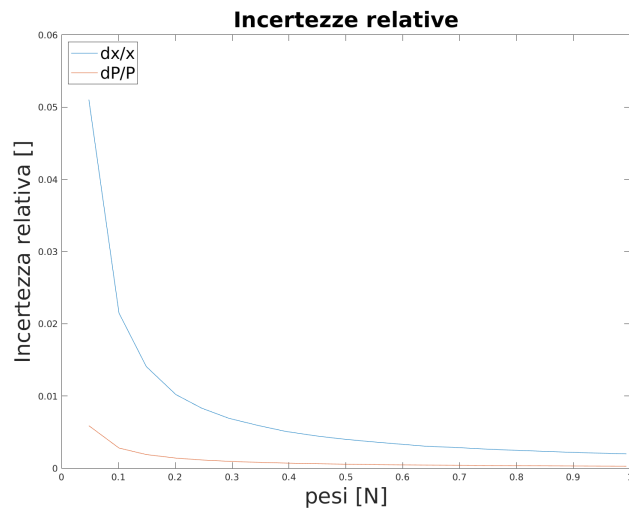


Figure 3: Incertezze relative in funzione del Peso, notare che l'incertezza su x è molto maggiore.

Da cui si calcola il seguente valore preferito con relativa incertezza:

$$k_w = 9.736 \text{ N/m}$$

$$\sigma[k_w] = 0.007 \text{ N/m}$$

Per verificare che $\sigma[k_w]$ ottenuta sia correttamente dimensionata si graficano (in fig.4) gli scarti $R_i = k_i - k_w$ in funzione dei pesi applicati P_i .

Come si può notare dal grafico gli scarti non si distribuiscono in modo omogeneo e casuale attorno al valore nullo ma per piccoli valori di forza applicata la costante elastica della molla risulta avere un k maggiore. Questo si spiega con il fatto che, per piccoli allungamenti, non tutte le spire della molla hanno già incominciato a distendersi per cui è come avere una molla con le stesse caratteristiche ma più corta il che comporta un valore k maggiore.

Possiamo ora calcolarci la media campionaria dei valori k_i ot-

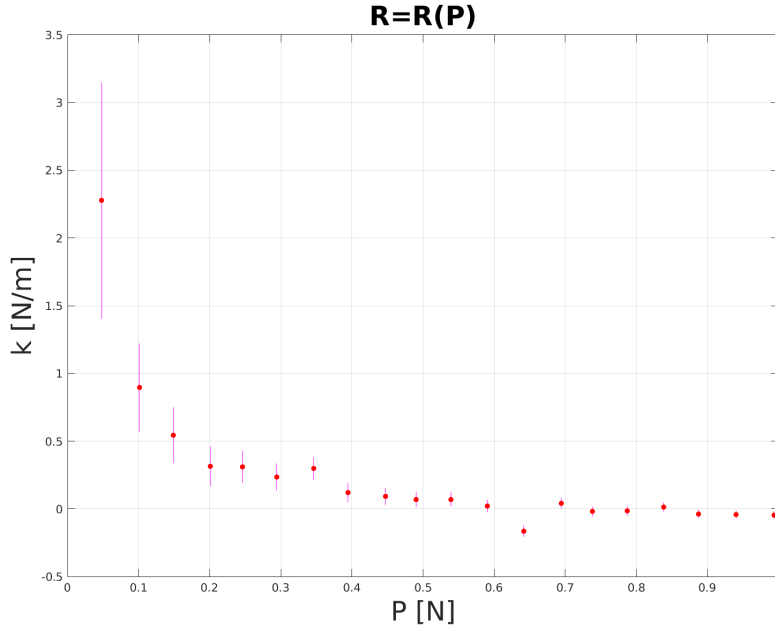


Figure 4: Resti di $k_i - k_w$

tenuti e la relativa incertezza data dallo scarto quadratico medio della distribuzione delle delle medie. Si ha $k_0 = 9.9 \text{ N/m}$ e $\sigma[m_k^*] = 0.1 \text{ N/m}$.

Tra i risultati ottenuti con le due differenti procedure si preferisce considerare il primo in quanto per piccoli valori P_i l'incertezza $\sigma[k_i]$ è relativamente grande e i k_i consecutivi variano di molto, quindi mi aspetto che i contributi al valore preferito in queste condizioni vengano meno pesati rispetto agli altri.

Un metodo meno formale per calcolare k è quello grafico a partire dalla Fig.1. Questo metodo però non è molto accurato, infatti non è possibile distinguere le rette di minima e massima pendenza ad occhio, date le barre d'errore molto piccole rispetto alla scala del grafico. Quindi si propone il valore di $k_0 = 9.7 \text{ N/m}$ con

un'incertezza presente ma non definibile.

Un modo più accurato per stimare la grandezza $k_0 \pm \sigma[k_0]$ è quello del fitting lineare utilizzando il metodo dei "minimi quadrati". Posto $\lambda_0 = 1/k_0$ si cerca il valore λ per cui la funzione (4), che rappresenta la nostra discrepanza tra tutti i punti (x_i, P_i) e la retta di fitting $x = \lambda P$, presenta un minimo, considerata l'incertezza relativa $\sigma[P_i]/P_i$ trascurabile rispetto a $\sigma[x_i]/x_i$.

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \lambda P_i)^2}{(\sigma[x_i])^2} \quad (4)$$

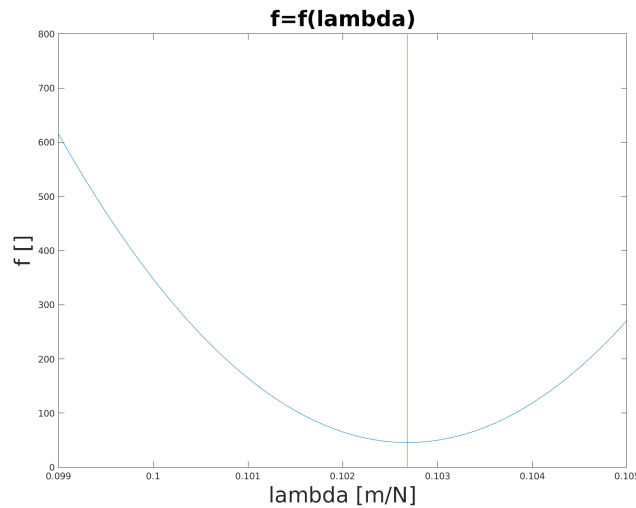


Figure 5: La linea rossa rappresenta il valore λ_0 calcolato nella (5)

Tale funzione presenta un minimo, con relativa incertezza per λ e k_0 dati dalla (5).

$$\lambda_0 = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i^2}, \quad \sigma[\lambda] = \frac{\sum x}{\sqrt{\sum P_i^2}}, \quad \sigma[k] = \frac{\sigma[\lambda] k_0}{\lambda_0} \quad (5)$$

I risultati ottenuti con i vari metodi sono quindi schematizzati nella seguente tabella:

	k_0 [N/m]	σk_0 [N/m]
Media pesata	9.74	0.014
Media campionaria	9.9	0.1
Metodo grafico	9.7	nc
Minimi quadrati	9.74	0.014

Dalla tabella riassuntiva soprastante si può appurare che tutti i valori ottenuti con i quattro metodi sono compatibili tra loro ad esclusione della media campionaria, la quale non tiene conto che la molla non si comporta secondo la legge di Hooke (2) quando il peso applicato è minimo, quindi questo valore non va considerato. Si può ovviare a questo problema pre-caricando la molla in modo che essa sia già distesa con peso applicato nullo o considerando nel calcolo solo i valori con pesi maggiori. Il metodo grafico permette solamente di dare una stima di k_0 che ci si dovrebbe aspettare negli altri casi. I restanti metodi invece forniscono risultati uguali tra loro sulle cifre significative.

Per dare una valutazione quantitativa di quanto i valori calcolati siano coerenti con la legge si procede ora al test del χ^2 , utilizzando la definizione (6) supponendo di nuovo trascurabile l'incertezza dei P_i .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - P_i/k_0)^2}{(\sigma[x_i])^2} \quad (6)$$

Quello che ci si aspetta è che i rapporti tra scarti e incertezze tipo, $(x_i - P_i/k_0)^2/\sigma[x_i]^2$, siano in media unitari e che la somma dei termini della sommatoria sia uguale a $\nu = N - 1$ che rappresenta i gradi di libertà del sistema (N dati meno un parametro, la costante di proporzionalità).

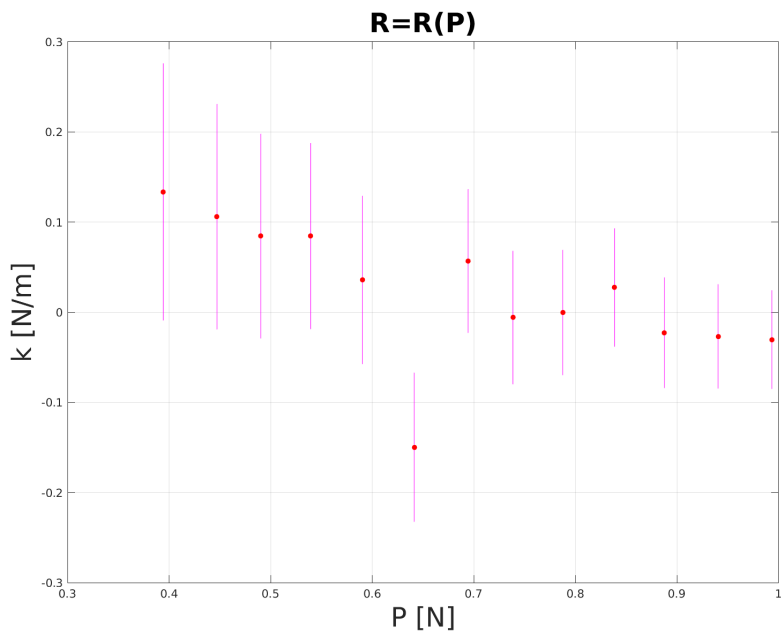


Figure 6: Grafico dei residui dei soli punti usabili per χ^2

Dato che sappiamo già che i primi punti sperimentali non rispettano una legge lineare, essi sono stati tolti e le conclusioni tratte riguarderanno i soli punti rimasti (6). Dal calcolo, prendendo il nuovo k_0 ottenuto riapplicando il metodo dei minimi quadrati, si hanno i seguenti risultati:

Nome	Valore
N	13
k_0	9.72(2) N/m
ν	12
χ^2	15

La buona riuscita del test sancisce che la legge di Hooke (2) non possa essere rigettata.

Da notare inoltre che nel grafico 6 la sesta misurazione sembra palesemente non concorde con le altre, questo può significare che la legge che lega forza ad allungamento ha un'espressione più complessa oppure, più facilmente, è stata presa una misurazione erronea. Se fosse stato tolto anche questo campione per il test del χ^2 avremmo ottenuto un valore $\chi^2 = 8.3$ con $\nu = 11$ e questo avrebbe suggerito che le incertezze sulle x_i sono state sopravvalutate ma non preclude la correttezza della legge.

Finite le misurazioni degli allungamenti sono stati ripresi a campione 5 pesetti e si è verificato che nel processo di misurazione la molla non ha subito deformazioni permanenti, infatti le nuove misurazioni sono compatibili con le precedenti modulo $\sigma[x_i]$.

4.2 Misurazione dinamica

Una misura di k con procedura differente può essere fatta in maniera indiretta a partire dalla conoscenza del periodo di oscillazione della molla in funzione della massa m che le viene applicata. A partire da considerazioni di tipo dimensionale giungiamo al risultato che il periodo di oscillazione è $\mathcal{T} = C\sqrt{m/k}$ dove C è una costante non determinabile da un'analisi dimensionale. Procediamo quindi all'acquisizione dei dati del periodo della molla variando la massa applicata a quest'ultima.

Per quanto riguarda le incertezze di misura di massa, valgono le

considerazioni fatte nell'analisi di procedura statica.

Prima di decidere la procedura di misura del periodo di oscillazione della molla effettuiamo un'analisi sull'incertezza finale e sul modo migliore per minimizzarla. Escludendo errori di tipo sistematico, imprevedibili a questo stadio di analisi, le fonti principali di incertezza in questa osservazione sono gli errori casuali e l'incertezza di risoluzione del cronometro. Entrambi questi fattori possono essere ridotti attraverso alcuni accorgimenti. Per ridurre l'incertezza di risoluzione dello strumento ($\Delta T_s = 0.01 \text{ s}$) possiamo misurare il periodo complessivo \mathcal{T}_{com} di \mathcal{M} oscillazioni consecutive della molla, per cui il periodo singolo si ricava come $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{com}/\mathcal{M}$ e la risoluzione della misura è $\Delta T_m = \Delta T_s/\mathcal{M}$. Aumentando quindi il numero di oscillazioni complessive diminuisce l'incertezza sulla risoluzione. Per minimizzare invece gli errori casuali si possono fare più misurazioni. Sappiamo infatti che, se lo scarto quadratico medio dei periodi \mathcal{T}_i è $\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]$, allora lo scarto tipo stimato delle medie è $\sigma_{cas}[m^*] \simeq \tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]/\sqrt{N}$ dove N è il numero di ripetizioni della misura effettuate. Ora, sapendo che l'incertezza tipo di risoluzione è $\sigma_{ris} = \Delta T_m/\sqrt{12}$ e che l'incertezza complessiva di una misura viene espressa come somma quadratica delle diverse incertezze componenti, possiamo dire che l'incertezza complessiva delle misurazioni è data da:

$$\delta_t = \sqrt{\left(\frac{\Delta T_s}{\mathcal{M}\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]}{\sqrt{N}}\right)^2}. \quad (7)$$

Dopo aver effettuato alcune misurazioni ed aver verificato l'andamento della (7) possiamo fare alcune osservazioni.

La prima è che dopo 10 oscillazioni l'effetto dell'attrito dell'aria contribuisce a smorzare il moto oscillatorio della molla, di conseguenza decidiamo di prendere la misura di $\mathcal{M} = 10$ oscillazioni complessive.

Con questo valore di \mathcal{M} il primo addendo nella radice della (7) assume un valore dell'ordine di grandezza di 10^{-4} s. La seconda è che sulla base del $\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]$ di misura tipico (calcolato a partire dalle precedenti esperienze e da alcune misurazioni tenendo $\mathcal{M} = 10$), ci basta prendere $N = 5$ ripetizioni di misura per avere anche il secondo addendo della radice con un ordine di grandezza di 10^{-4} s. Ad ogni modo si nota che in media i valori assunti dal secondo membro della somma quadratica sono leggermente preponderanti rispetto a quelli assunti dal primo.

Una volta prese le misurazioni del periodo di oscillazione della nostra molla con 11 masse diverse, effettuiamo un plot dei risultati (Fig.7). In questo grafico sono state inserite le relative barre d'errore ai punti sperimentali.

Quelle lungo l'asse delle ascisse sono uguali per tutti i punti in quanto sono date dall'incertezza di risoluzione nella misura del peso della massa. Data infatti la risoluzione della bilancia $\Delta m = 1 \times 10^{-4}$ kg abbiamo che l'incertezza tipo è $\delta m = \Delta m / \sqrt{12} \simeq 3 \times 10^{-5}$ kg.

Per il calcolo dell'incertezza tipo sul periodo del pendolo è stata invece utilizzata la formula (7).

Guardando il grafico Fig.7 si osserva che la distribuzione dei punti non sembra seguire un andamento lineare, come d'altro canto ci suggerisce l'analisi dimensionale. Infatti da $\mathcal{T} = C\sqrt{m/k}$ si ha che $\mathcal{T}^2 \propto m$, esiste quindi una corrispondenza lineare tra il quadrato del periodo e la massa applicata alla molla.

Nel grafico (Fig.8) è stato quindi rappresentato in ordinata il quadrato del periodo di oscillazione della molla ed in ascissa la massa applicata alla stessa. A partire da questo grafico e soprattutto dalle osservazioni sperimentali, come nel caso della misurazione statica di k , notiamo che la molla non si estende completamente quando la

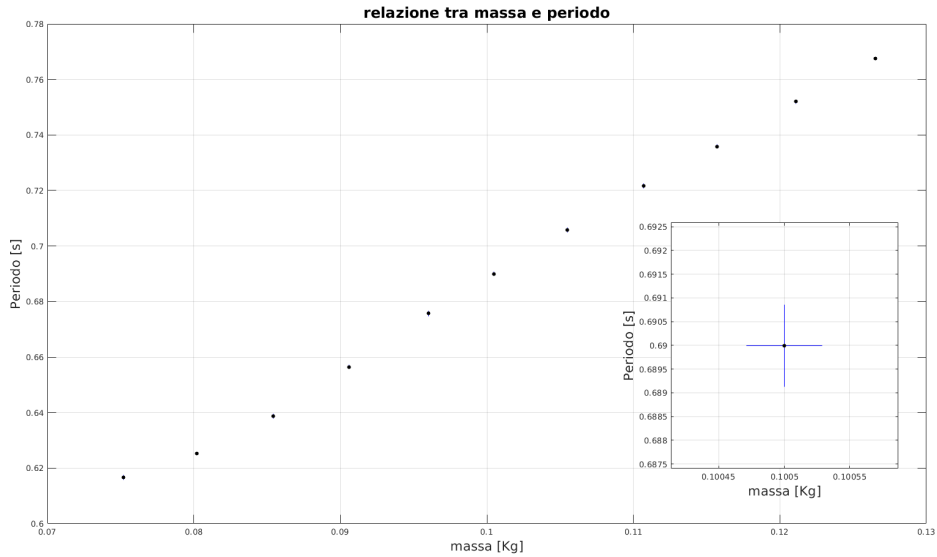


Figure 7: In questo grafico è rappresentato il periodo della molla \mathcal{T} in funzione della massa m applicata. I punti singoli con relative barre d'errore sono i dati sperimentali.

massa applicata è troppo leggera. In questo caso il comportamento della molla non è lineare anche quando il peso applicato è superiore rispetto alla soglia massima di non linearità della misurazione statica. Questo avviene perché, anche se viene appesa una massa che all'equilibrio distende tutte le spire della molla, nel momento della compressione della stessa, le spire superiori si avvicinano l'una all'altra rimanendo attaccate per del tempo, quindi è come se la molla fosse più corta di quanto realmente non sia.

Sulla base dell'osservazione in laboratorio notiamo che il comportamento appena descritto si verifica con le masse nominali $m_1 = 7.5 \times 10^{-2} \text{ kg}$ e $m_2 = 8.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$, per questo motivo nell'analisi dei dati successiva si è scelto di considerare le misurazioni in questione come outstanding.

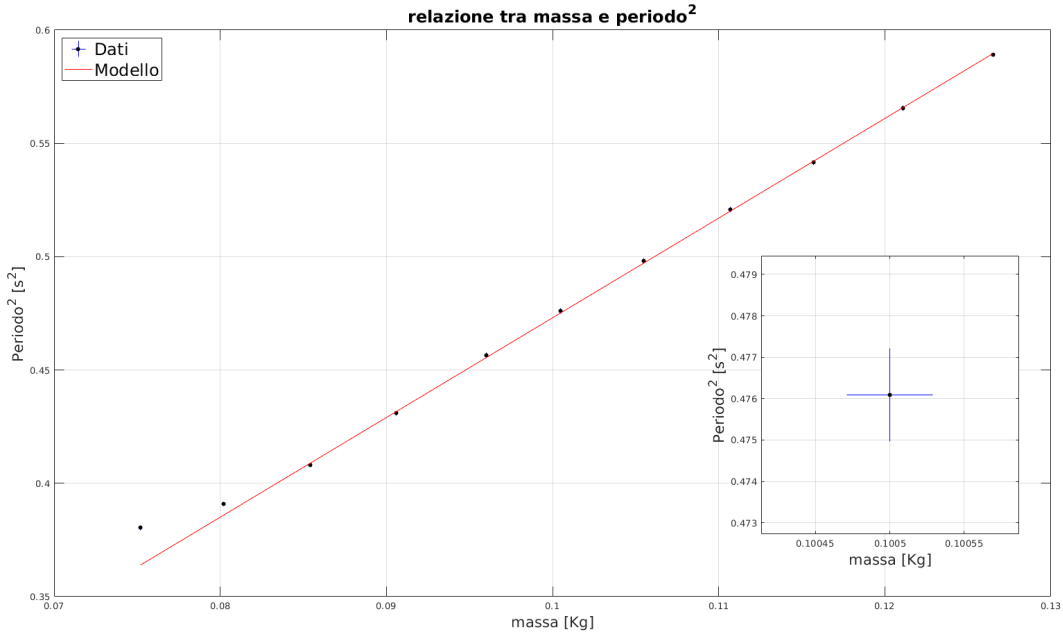


Figure 8: In questo grafico abbiamo il quadrato del periodo della molla \mathcal{T}^2 in funzione della massa applicata m . I punti singoli con relative barre d'errore sono i dati sperimentali mentre la retta rossa rappresenta il modello teorico. Coefficiente angolare e intercetta della retta sono stati ottenuti con il metodo di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati.

Il grafico corretto senza i suddetti valori è la Fig. 9.

In questo grafico per il calcolo delle barre di incertezza sulla massa valgono le considerazioni fatte per il grafico con periodo non elevato al quadrato, quindi con $\delta m = \Delta m / \sqrt{12} \simeq 3 \times 10^{-5} \text{ kg}$. Le barre di incertezza sull'asse delle ordinate invece cambiano, infatti nella (7) è presente un $\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]$, che è riferito ai \mathcal{T}_i , ma ora va utilizzato $\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i^2]$ riferito ai \mathcal{T}_i^2 . Date le regole di propagazione dell'incertezza nel caso di una grandezza fisica che sia il quadrato di un'altra abbiamo che $\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i^2] = 2\mathcal{T} \tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]$.

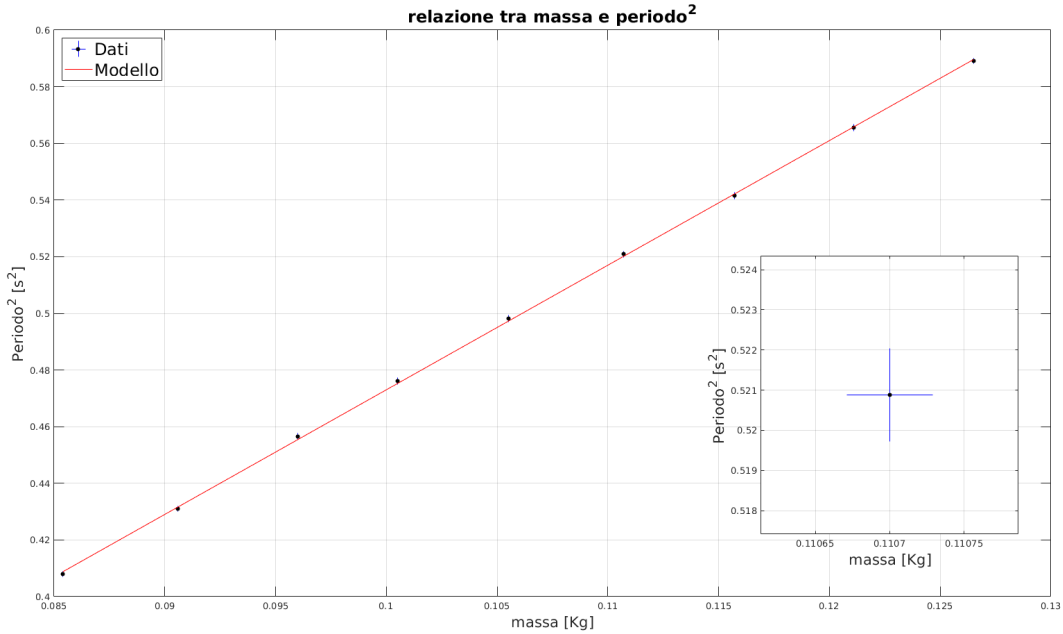


Figure 9: In questo grafico corretto, con massa in ascissa e quadrato del periodo in ordinata, sono stati rimossi i due dati con massa minore. I punti singoli con relative barre d'errore sono i dati sperimentali mentre la retta rossa rappresenta il modello teorico. Coefficiente angolare e intercetta della retta sono stati ottenuti con il metodo di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati.

In definitiva quindi si ha che l'incertezza tipo totale sul periodo quadro è:

$$\delta \mathcal{T}_i^2 = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{T} \Delta T_s}{\mathcal{M} \sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i^2]}{\sqrt{N}}\right)^2}. \quad (8)$$

È evidente anche solo graficamente la linearità della relazione tra massa e periodo quadro.

Il grafico dei residui (Fig.10) mostra la differenza tra il modello ottenuto con la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati e i dati sperimentali. Le barre di errore dei dati sperimentali co-

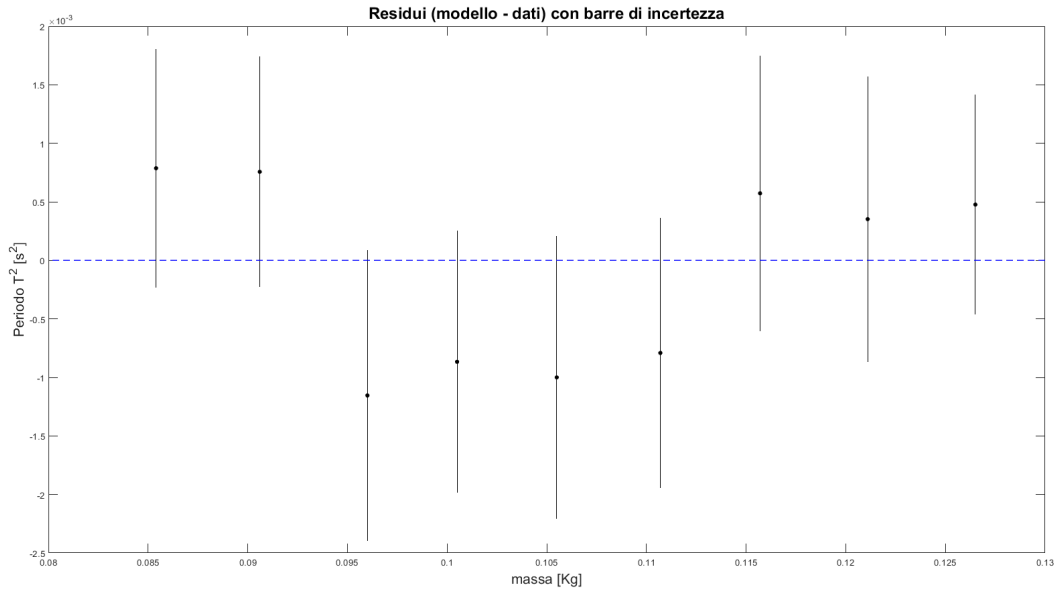


Figure 10: Grafico dei residui con barre di incertezza.

incidono con i $\delta\mathcal{T}_i^2$ calcolati precedentemente. Si può osservare che il modello può essere preso per vero infatti tutte le barre di errore intersecano la retta $Y=0$, indice del fatto che c'è compatibilità tra i dati ed il modello. Si può notare in più che nel grafico i dati non sono tra loro allineati, e questo si spiega per la presenza degli errori casuali che hanno influenzato le misure.

Osserviamo anche che nel grafico con il periodo quadro (Fig.9), se prolungassimo la linea del fit, questa intersecherebbe l'asse delle ascisse in corrispondenza di un valore negativo. Questo valore può essere interpretato come $-m_e$, ovvero l'opposto della massa efficace della molla. Quest'ultima non sarebbe altro che un valore quantitativo dell'inerzia della molla, la quale infatti oscilla anche quando non le viene applicato nessun peso, appunto per colpa della sua inerzia intrinseca. Nella successiva analisi terremo conto an-

che del parametro della massa efficace e faremo delle ulteriori osservazioni dopo aver trovato il suo effettivo valore con relativa incertezza. D'ora in poi chiameremo quindi $M = m + m_e$ la somma di massa efficace e massa applicata alla molla, così la nostra equazione del periodo diventa:

$$\mathcal{T} = C\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \mathcal{T}^2 = \frac{C^2}{k}m_e + \frac{C^2}{k}m \quad (9)$$

che si può riscrivere come:

$$y = A + Bx, \quad (10)$$

con $y \doteq \mathcal{T}^2$, $x \doteq m$, $A \doteq C^2m_e/k$ e $B \doteq C^2/k$.

A questo punto possiamo calcolarci una stima dei parametri A e B attraverso la procedura di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati già utilizzata per tracciare le linee di modello nelle Fig.8 e 9. Questo metodo tiene conto solamente delle incertezze $\delta y_i = \delta \mathcal{T}_i^2$ sulla variabile Y. Quindi per poterlo applicare dobbiamo prima verificare che le incertezze sull'asse delle ascisse ($\delta x = \delta m$) siano trascurabili rispetto a δy_i . Effettivamente, dopo aver trasferito l'incertezza dalla massa al periodo quadrato attraverso la relazione $(\sigma[y_i])_{tr} = |B|\sigma[x_i]$, notiamo che la presenza o meno dell'incertezza sulla massa può essere considerata trascurabile per il grado di approssimazione che interessa a noi.

Procediamo allora ad applicare il metodo dei minimi quadrati che mira a minimizzare la discrepanza tra i valori sperimentali e la retta del nostro modello. La discrepanza puntuale viene misurata lungo l'asse y considerando il quadrato della differenza tra le ordinate del punto e della retta: $(y_i - A - Bx_i)^2$. La discrepanza totale tiene conto della somma delle discrepanze dei vari punti pesate sul quadrato dell'incertezza relativa ai punti. Chiamata χ^2 la discrepanza globale

si ha che:

$$\chi^2 = \sum_{i=3}^{11} w_i [y_i - A - Bx_i]^2, \quad (11)$$

con il peso $w_i = 1/(\delta y_i)^2$.

I valori di A e B che minimizzano la (11) sono

$$A = \frac{(\sum_i w_i x_i^2)(\sum_i w_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i x_i y_i)}{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2}, \quad (12)$$

$$B = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i y_i)(\sum_i w_i x_i)}{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i^2) - (\sum_i w_i x_i)^2}. \quad (13)$$

Una volta chiamato Δ il denominatore di (12) e (13), possiamo inoltre calcolare le incertezze su A e B basandoci sulle regole di propagazione ottenendo:

$$(\sigma[A])^2 = \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta}; \quad (\sigma[B])^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta}. \quad (14)$$

Riportiamo nella tabella di seguito i nostri valori di A e B con relative incertezze:

Parametro	Valore
A	0.033 s ²
B	4.399 s ² kg ⁻¹
$\sigma[A]$	0.003 s ²
$\sigma[B]$	0.027 s ² kg ⁻¹

A questo punto possiamo risalire ai valori di C ed m_e con degli intervalli di incertezza, sappiamo infatti che $A \doteq C^2 m_e / k$ e $B \doteq C^2 / k$. Prendendo allora come costante elastica della molla $k = k_0 = 9.74(2) \text{ N/m}$ il valore ottenuto attraverso la misurazione statica, si ha che:

$$C_0 = \sqrt{Bk} = 6.539; \quad m_{e0} = \frac{Ak}{C^2} = \frac{Ak}{Bk} = \frac{A}{B} = 7.6 \times 10^{-3} \text{ kg}. \quad (15)$$

Le incertezza su m_{e0} viene calcolata sapendo che l'incertezza relativa sulla divisione di due grandezze è pari alla somma quadratica delle incertezze relative sulle grandezze stesse. Si ottiene così che $\delta m_e = 7 \times 10^{-4} \text{ kg}$. Per trovare l'incertezza su C_0 è necessario invece applicare le regole di propagazione di incertezza prima sul prodotto ed infine sulla potenza di grandezze. Si ottiene così $\delta C_0 = 4 \times 10^{-3}$. Si possono ora fare alcune considerazioni sugli ultimi dati esposti. Stando alla teoria il valore della massa efficace dovrebbe essere un terzo di quello della massa della molla, che nel nostro caso è 24 g , di conseguenza il valore che ci si aspetta dalla massa efficace dovrebbe essere 8 g , perfettamente nell'intervallo di incertezza della m_e calcolata a partire dalle osservazioni.

Per avere una conferma matematica sulla compatibilità del nostro modello con i dati sperimentali eseguiamo il test del chi quadrato.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{(\sigma y_i)^2} \quad (16)$$

Come la formula (16) suggerisce questa volta i valori da prendere in considerazione sono due, ovvero i coefficienti A e B della retta $y = A + Bx$, per questo motivo ora il problema ha $N - 2$ gradi di libertà, dove N è il numero di campioni presi in considerazione nella formula, nel nostro caso $N = 9$. Così questo test del chi quadrato, a differenza di quello calcolato nelle misure statiche, dovrà soddisfare con buona approssimazione $\chi^2 \simeq N - 2$, e solo se quest'equazione sarà soddisfatta potremmo giungere alla conclusione che il modello trovato interpreta bene i dati sperimentali. Per questo motivo il test del chi quadrato ci permette di verificare in particolare se le incertezze sono state valutate correttamente. Per poter applicare il test del chi quadrato le incertezze sulle grandezze in ascissa devono poter essere trascurabili rispetto a quelle sulle ordinate, in più queste ultime devono essere espresse mediante uno scarto tipo. Queste con-

dizioni sono state verificate nei punti precedenti.

Nel nostro caso con $A = 0.033 \text{ s}^2$ e $B = 4.399 \text{ s}^2 \text{kg}^{-1}$ (precedentemente calcolati) il chi quadrato è $\chi^2 = 4.367$. Poiché ci aspettavamo un $\chi^2 \simeq N-2 = 7$ possiamo considerare i dati compatibili rispetto al modello. Anche se il nostro chi quadro non è perfettamente uguale a quello aspettato è comunque molto simile. In più dal punto di vista matematico si può dimostrare la compatibilità del risultato facendo il test two sided, fissando una percentuale di falso allarme ad esempio dell'1%, in particolare 0.5% da un lato della distribuzione e 0.5% dall'altro. Dal test risulta che il χ^2 deve essere all'interno di un'intervallo tra 0.989 e 20.3, e ciò conferma l'accettabilità di un $\chi^2 = 4.367$.

Dalla teoria dell'oscillatore armonico si trova che il periodo di oscillazione per una molla perfettamente elastica è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (17)$$

La costante elastica k può essere ricavata anche dalla formula (17), quindi da una misura dinamica e non solo da una misura statica. In particolare si ottiene dalla (17) che

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2}. \quad (18)$$

Per il calcolo della costante k dinamica si è applicata la (18) ad ogni misura del periodo dei dati sperimentali ed infine si è fatta la media pesata di tutti le k_i pesate in base alla loro relativa incertezza $\sigma[k_i]$. Per il calcolo delle relative incertezze si è fatto uso delle formule della propagazione dell'incertezza, come quella relativa alla somma o differenza di due grandezze $(\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2$, o al prodotto per scalare di una grandezza $\delta Q = |b|\delta X$, oppure al prodotto o divisione di due grandezze $(\frac{\delta Q}{Q_0})^2 \simeq (\frac{\delta X}{X_0})^2 + (\frac{\delta Y}{Y_0})^2$. Facendo tutte le considerazioni elencate la misura del k dinamico

risulta essere $k_{din} = 9.620 \pm 0.008 \text{ N/m}$. Confrontando il k dinamico a quello statico ($k_{stat} = 9.74 \pm 0.02 \text{ N/m}$) si può osservare una differenza nel valore centrale della misura di circa 10^{-1} N/m . Possiamo avanzare un'ipotesi per spiegare questi risultati così discordanti, ovvero il fatto che le misure statiche e dinamiche della molla sono state effettuate in due giorni distinti, a distanza di una settimana. Va sottolineato che la molla utilizzata in questo esperimento è stata usata anche da altri operatori per altri esperimenti, e questi potrebbero aver deformato irrimediabilmente la molla causandone la diminuzione della costante elastica k . Per concludere notiamo anche che l'incertezza sul k_{stat} è il doppio rispetto a quella sul k_{din} , quindi nel nostro caso è preferibile prendere come costante elastica un valore calcolato attraverso una misura dinamica.