

Seconda, Terza e Quarta esperienza di laboratorio  
Filtro RL e filtro RLC - Relazione

Gruppo A12  
a.a 2018/2019

Brognoli Roberto, Garbi Luca  
6 Dicembre 2018

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Materiali e metodi</b>	<b>3</b>
2.1	Materiali . . . . .	3
2.2	Procedure di misura . . . . .	3
2.2.1	Allestimento circuito RL passa basso e stima valore di induttanza . .	3
2.2.2	Allestimento circuito RLC passa banda e studio della funzione di trasferimento . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Analisi dei dati</b>	<b>6</b>
3.1	Circuito RL passa basso . . . . .	6
3.2	Filtro RLC passa banda . . . . .	9
3.2.1	Misura della capacità parassita dell'induttore . . . . .	9
3.2.2	Studio della funzione di trasferimento . . . . .	10

# 1 Introduzione

Nella seguente relazione sono esposti i risultati relativi alla misura dell'induttanza di una bobina con nucleo ferromagnetico, eseguita tramite lo studio di un circuito RL in fase di scarica. A questo scopo sono stati utilizzati resistori con 5 valori diversi di resistenza, un generatore di onde quadre e un oscilloscopio, dal quale sono stati estrapolati set di dati utili a calcolare il valore di induttanza. È stata poi verificata la relazione di dipendenza tra la resistenza  $R$  e il tempo tipico  $\tau$  del circuito. Nella seconda parte dell'esperienza è stata studiata la risposta in frequenza di un filtro passa banda RLC tramite un generatore di onde sinusoidali e l'oscilloscopio. Grazie ai diagrammi di Bode sono stati rappresentati modulo e fase della funzione di trasferimento, valutando la compatibilità con il diagramma teorico e il comportamento del circuito nei diversi regimi di frequenza.

## 2 Materiali e metodi

### 2.1 Materiali

- Breadboard;
- resistori vari (i valori di resistenza e incertezza sono specificati in seguito);
- multimetro digitale (DMM) *Agilent 34410A*;
- condensatore (capacità misurata con DMM  $58.6 \text{ nF} \pm 0.4 \text{ nF}$ );
- induttore (bobina) di rame verniciato con nucleo ferromagnetico (resistenza misurata con DMM  $R_{bob} = 0.544 \text{ } \Omega \pm 0.004 \text{ } \Omega$ );
- generatore di funzione *Agilent 33120A* (impedenza nominale in uscita  $R_s = 50 \text{ } \Omega$ );
- oscilloscopio *Agilent DSOX2002A*;
- cavi banana-banana, cavo coassiale BNC-BNC, cavi coassiali BNC-banana, fili conduttori, clip a cocodrillo.

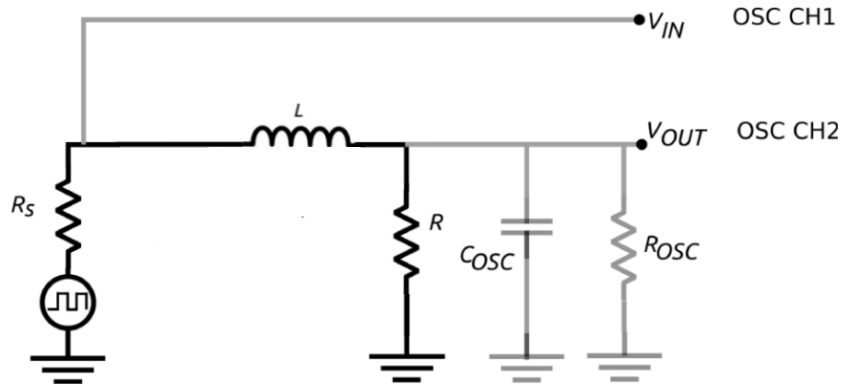
### 2.2 Procedure di misura

#### 2.2.1 Allestimento circuito RL passa basso e stima valore di induttanza

Sia nella prima che nella seconda parte di questa esperienza è stata utilizzata una bobina di rame verniciato all'interno di un nucleo di ferrite come induttore  $L$ . La prima parte dell'esperienza consiste proprio nella misura del valore di induttanza della bobina attraverso l'analisi della scarica di un circuito  $RL$  (Fig.1) utilizzando l'oscilloscopio. Un procedimento di misura analogo (però con un circuito  $RC$ ) è stato effettuato precedentemente per determinare i valori di capacità del condensatore  $C$  (utilizzato nella seconda sezione), della capacità di oscilloscopio e cavi coassiali di connessione (che chiameremo  $C_{osc}$ ) e della resistenza  $R_{osc}$  degli stessi, pertanto nella seguente analisi verranno solamente citati i risultati ottenuti nelle precedenti esperienze.

Il circuito  $RL$  è stato montato con 5 valori di resistenza differenti; la loro misura con incertezza, effettuata con il multimetro, è  $R_1 = 20.21 \text{ } \Omega \pm 0.21 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 60.61 \text{ } \Omega \pm 0.21 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 110.60 \text{ } \Omega \pm 0.21 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 161.04 \text{ } \Omega \pm 0.22 \text{ } \Omega$ ,  $R_5 = 200.54 \text{ } \Omega \pm 0.22 \text{ } \Omega$ . Notiamo inoltre che il nostro induttore non è ideale quindi possiede una resistenza intrinseca  $R_L$ , che possiamo vedere come una resistenza a sé stante in serie con l'induttanza. In prima approssimazione possiamo attribuire al valore  $R_L$  quello di  $R_{bob} = 0.544 \text{ } \Omega \pm 0.004 \text{ } \Omega$ , trascurando però così l'impedenza data da resistenze di contatto e da altri fattori, nella parte di analisi verrà data una migliore stima.

Il generatore di funzione viene impostato per fornire un'onda quadra ad un'ampiezza picco-picco di  $1.9 \text{ V}$ , con un off-set di  $0.95 \text{ V}$ .



**Figure 1:** Nel grafico superiore  $C_{osc}$  rappresenta la capacità dell'oscilloscopio e dei cavi coassiali di connessione,  $R_{osc}$  la resistenza all'ingresso dell'oscilloscopio, e  $R_s$  è la resistenza interna del generatore.

Sappiamo da una stima approssimata, che, dopo un tempo caratteristico  $\tau = L/R$  dal momento di inizio della scarica, il voltaggio in uscita  $V_{out}$  del nostro circuito vale circa il 37% in meno rispetto a quello prima della scarica (idealmente  $V_{in}$ ). Facciamo allora in modo, per ogni valore di resistenza, di aggiustare la frequenza e la scala temporale sull'oscilloscopio in modo da visualizzare sullo schermo dello stesso circa  $4\tau$ . Fatto questo effettuiamo 5 acquisizioni della schermata dell'oscilloscopio prendendo 5000 punti per ognuna. Le incertezze utilizzate per l'oscilloscopio sono quelle fornite dal costruttore, interpretate come due scarti tipo. L'incertezza di risoluzione sulla scala verticale è pari quindi a 1.5% *full scale*, quella sui tempi invece è pari a  $\pm 8 \times 10^{-4}$  per il fondo scala totale orizzontale. In questa prima parte dell'esperienza l'incertezza temporale non è stata utilizzata, mentre per quella orizzontale è rimasta costante per tutti i valori di resistenza in quanto il fondo scala per sezione è rimasto fisso a 500 mV.

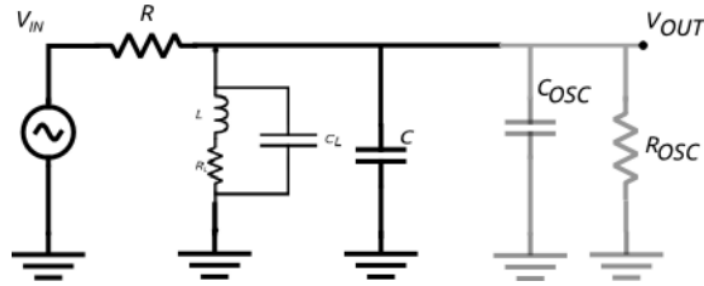
Nelle esperienze precedenti attraverso una procedura simile ed un'analisi analoga a quella svolta nella sezione successiva abbiamo trovato per il condensatore una capacità di  $58.01 \text{ nF} \pm 0.04 \text{ nF}$ , per i cavi e l'oscilloscopio invece  $C_{osc} = 105.6 \text{ pF} \pm 1.6 \text{ pF}$ , con una resistenza  $R_{osc} = 1002350 \text{ } \Omega \pm 1400 \text{ } \Omega$ .

### 2.2.2 Allestimento circuito RLC passa banda e studio della funzione di trasferimento

Per la seconda parte dell'esperienza è stato allestito un circuito *RLC* passa banda (Fig. 2) con lo scopo di analizzare la funzione di trasferimento dello stesso e confrontarla con quella attesa del modello.

Oltre ai componenti del circuito già citati nella sotto sezione precedente, in questa terremo conto anche della non idealità del nostro induttore che infatti si compone, oltre che dell'induttanza stessa e di  $R_L$ , anche di una capacità  $C_L$ .

Quella di  $C_L$  è la prima misura effettuata in questa sezione, infatti al circuito *RLC* è stato



**Figure 2:** Nel grafico superiore  $C_{osc}$  rappresenta la capacità dell'oscilloscopio e dei cavi coassiali di connessione,  $R_{osc}$  la resistenza all'ingresso dell'oscilloscopio, e  $R_s$  è la resistenza interna del generatore.

tolto inizialmente il condensatore e con una resistenza  $R_g = 10002.1 \Omega \pm 0.4 \Omega$  se ne è studiata la frequenza di risonanza. Quest'ultima è stata calcolata con l'ausilio dell'oscilloscopio che riceveva in ingresso il segnale in entrata  $V_{in}$  e quello in uscita  $V_{out}$ , e calcolava la sfasatura  $\phi$  tra i segnali e l'ampiezza picco-picco di entrambi.

Successivamente è stato reinserito il condensatore ed è stato analizzato il circuito utilizzando due differenti valori di resistenza ( $R_g$  e  $R_p = 500.6 \Omega \pm 0.1 \Omega$ ). In ingresso abbiamo un'onda sinusoidale (1.8 V picco-picco) creata con il generatore di funzione; cambiamo, per ogni resistenza, 40 valori di frequenza nell'intervallo da 160 Hz a 51 KHz e dall'oscilloscopio prendiamo l'ampiezza picco-picco di  $V_{in}$ , di  $V_{out}$  e la fase tra i segnali. Per una miglior lettura l'oscilloscopio è stato settato in modo da acquisire 16 medie per ogni schermata, questa impostazione è mantenuta per tutti i valori di frequenza nonostante si riveli fondamentale solamente a frequenze alte dove si hanno maggiori fluttuazioni casuali del segnale.

Concentriamo le misure soprattutto attorno alla frequenza di risonanza cercando di prendere i dati in modo che la fase cambi di  $5^\circ$  da uno all'altro. Per ogni misura annotiamo inoltre il valore del fondo scala dell'oscilloscopio sia per la differenza di potenziale che per il tempo, infatti sarà utile poi per il calcolo delle incertezze.

### 3 Analisi dei dati

Come per le procedure di misura anche l'analisi dati è suddivisa in due sotto sezioni, nella prima vengono esposti e commentati i dati ottenuti dalla misura della scarica del circuito  $RL$ . Nella seconda parte invece ci sarà l'analisi del circuito  $RLC$  ed il confronto del modello teorico dello stesso con le evidenze sperimentali ottenute durante l'esperienza.

Non viene riportata una conclusione in quanto i risultati vengono già esaminati e commentati in questa sezione.

#### 3.1 Circuito RL passa basso

Al fine di determinare il valore di induttanza dell'induttore presente nel circuito, consideriamo la figura 1. Per frequenze basse ( $\tau > \mu s$ ) la capacità parassita dell'induttanza, la capacità dell'oscilloscopio e quella dei cavi coassiali possono essere trascurate. L'espressione che descrive l'andamento della differenza di potenziale in uscita durante la fase di scarica è:

$$V_{out}(t) = \mathcal{E}^* e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta V = \mathcal{E}^* e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{\mathcal{E}^* e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \approx \mathcal{E}^* e^{-\frac{t}{\tau}} \left( 1 + \frac{\delta V}{V_{out}} \right) \quad (1)$$

Applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri della (1) otteniamo

$$\ln(V_{out}) \approx \ln(\mathcal{E}^*) - \frac{t}{\tau} + \frac{\delta V}{V_{out}} \implies \ln(V_{out}) \approx A + Bt + C \left( \frac{1}{V_{out}} \right) \quad (2)$$

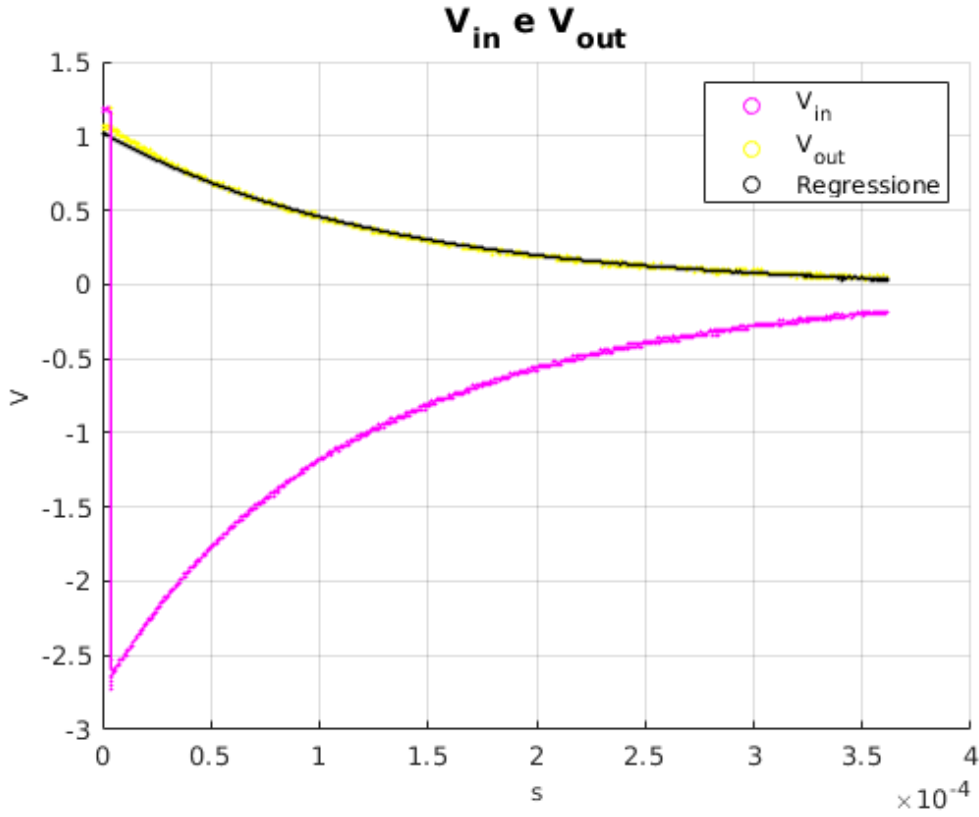
$V_{out}$  è la differenza di potenziale misurata dall'oscilloscopio al tempo  $t$ ,  $\tau = \frac{L}{R}$  e  $\mathcal{E}^*$  e  $\delta V$  sono parametri da determinare. Il termine  $\delta V$  è stato aggiunto per correggere l'offset dell'oscilloscopio. Per ogni set di misure di ogni resistenza otteniamo un valore di A, B, C (con le rispettive incertezze) tramite un fit lineare a 3 parametri. Possiamo visualizzare l'andamento esponenziale di  $V_{out}$  descritto dalla 1 nella seguente figura (Fig.3), oltre a  $V_{out}$  sono rappresentati  $V_{in}$ , misurata dopo il generatore, e il grafico ottenuto tramite la regressione lineare appena esposta. I grafici si riferiscono al primo set di dati della prima resistenza. L'espressione del grafico ottenuto con la regressione (in nero) è stata trovata come

$$V_{out}^{reg} = \exp\left(A + Bt + \frac{C}{V_{out}}\right)$$

dove A, B, C sono i parametri calcolati tramite il fit lineare a 3 parametri.

Si può notare un effetto di "overshoot" in  $V_{in}$  dovuto al fatto che esso viene misurato *dopo* la resistenza del generatore.

Siccome l'informazione sul valore di induttanza è contenuta in  $B = -\frac{1}{\tau}$ , per ogni resistenza calcoliamo una media campionaria di questo parametro ottenendo i seguenti risultati:



**Figure 3:** Rappresentazione dei dati presi nel primo set di misure della prima resistenza durante la fase di scarica e del modello dato dalla regressione relativa a quei dati.

$\mathbf{B} \left(\frac{1}{s}\right)$	$\sigma[B]\left(\frac{1}{s}\right)$	$\mathbf{R} \left(\Omega\right)$	$\sigma_{ris}[R](\Omega)$
-7429	55	20.2	0.2
-11096	37	60.6	0.2
-16197	44	110.6	0.2
-21069	45	161.0	0.2
-24732	16	200.5	0.2

dove  $\sigma[B]$  è l'errore sulla media, ovvero  $\sigma[B] = \frac{\sigma[B_i]}{\sqrt{5}}$  ( $\sigma[B_i]$  è lo scarto tipo calcolato dai parametri  $B$  di ciascuna resistenza). Eseguiamo quindi una seconda regressione lineare per valutare la relazione tra i parametri  $B$  e i valori di resistenza. Vale infatti

$$-B = \frac{1}{\tau} = \frac{R_{gen} + R_L + R}{L} = D + ER \quad (3)$$

con  $D = \frac{R_{gen} + R_L}{L}$  ed  $E = \frac{1}{L}$ . Troviamo quindi i valori di  $D$  ed  $E$  che minimizzano la sommatoria

$$\sum_{i=1}^N \frac{(B_i^2 - D - ER_i)^2}{(\sigma_{tot}[B])^2}$$

Nel calcolo dell'incertezza presente al denominatore abbiamo tenuto conto anche dell'incertezza su  $R$ , propagandola in incertezza su  $B$  come:

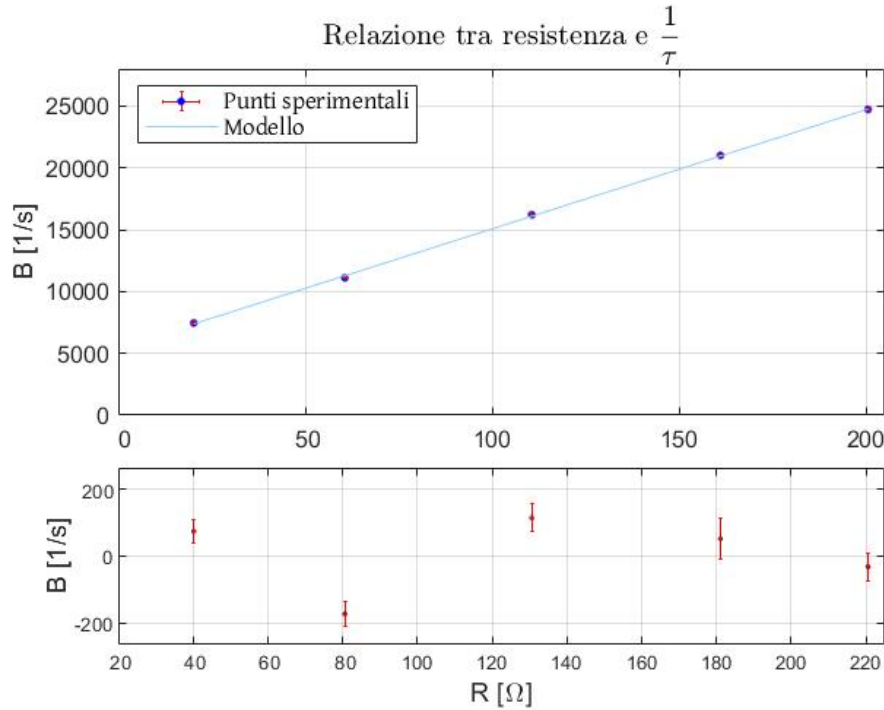
$$\sigma_{tot}[B] = \sqrt{\sigma[B]^2 + (|E_{graf}| \sigma_{ris}[R])^2}$$



dove  $E_{graf}$  è un valore approssimato di  $E$  trovato con il metodo di massima e minima pendenza. Tramite il metodo dei minimi quadrati otteniamo:

Parametro	Valore
$D$	$5386 \frac{1}{s}$
$\sigma[D]$	$45 \frac{1}{s}$
$E$	$96.7 \frac{1}{H}$
$\sigma[E]$	$0.3 \frac{1}{H}$

I dati con la retta data dai parametri della regressione sono rappresentati nel grafico sottostante (Fig. 4); nella parte inferiore si trova invece il grafico dei residui tra punti sperimentali e modello. Notiamo dal grafico che i residui sembrano essere disposti casualmente



**Figure 4:** Il grafico superiore rappresenta in ordinata il parametro  $B = 1/\tau$  in funzione della resistenza. In blu abbiamo i punti trovati tramite il fit precedente, in azzurro la retta di regressione. Nel grafico inferiore invece sono rappresentati i residui tra i dati sperimentali e il modello dato dalla retta.

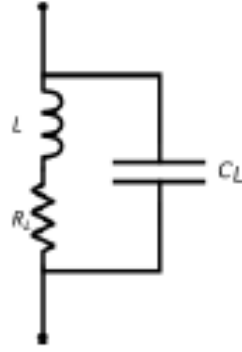
attorno allo *zero* e che i dati seguono un andamento lineare. Possiamo quindi calcolare il *chi quadrato ridotto* con 3 gradi di libertà: il valore che otteniamo è  $\chi_r^2 = 8.3$ .

Ricaviamo l'induttanza e la sua incertezza come

$$L = \frac{1}{E} \quad e \quad \sigma[L] = \frac{1}{E^2} \sigma[E]$$

ottenendo  $L = 10.30 \text{ mH} \pm 0.03 \text{ mH}$ .

Una volta trovata l'induttanza  $L$ , possiamo ricavare la resistenza dell'induttore che nel caso



**Figure 5:** Induttore reale: oltre all'induttanza sono presenti capacità e resistenza parassite.

reale può essere raffigurato come in figura 5. La resistenza dell'induttore, utilizzato come elemento circuitale, andrebbe infatti corretta di un fattore dipendente dalla frequenza. Con il coefficiente  $D = \frac{R_{gen} + R_L}{L}$  appena calcolato possiamo darne una stima per il range di frequenze utilizzato. Calcoliamo  $R_L$  come

$$R_L = DL - R_{gen}$$

$$\sigma[R_L] = \sqrt{L^2\sigma[D]^2 + D^2\sigma[L]^2}$$

ottenendo  $R_L = 5.5 \Omega \pm 0.5 \Omega$ , notiamo allora che, come anticipato nelle procedure di misura, abbiamo ottenuto un valore differente da quello misurato semplicemente con il multimetro digitale.

## 3.2 Filtro RLC passa banda

### 3.2.1 Misura della capacità parassita dell'induttore

Per effettuare una stima del valore di  $C_L$  è stata trovata la frequenza di risonanza del circuito  $RLC$ , una volta privato del condensatore. Per fare ciò, prima abbiamo trovato la frequenza per la quale lo sfasamento tra  $V_{in}$  e  $V_{out}$  fosse circa nullo variando l'input sul generatore d'onde e controllando la fase sull'oscilloscopio. Successivamente abbiamo preso 4 valori di frequenza e fase in un intorno della frequenza così trovata. Prendendo questi punti abbastanza vicini (nel nostro caso la fase varia di al massimo  $2.5^\circ$  da  $0^\circ$ ) una legge lineare è una buona approssimazione tra fase  $\phi$  e frequenza  $f$ :

$$\phi = \alpha + \beta f.$$

Con il metodo di regressione lineare attraverso i minimi quadrati troviamo  $\alpha = -132^\circ \pm 3^\circ$  e  $\beta = 1.00^\circ ms \pm 0.02^\circ ms$ .

Imponendo ora  $\phi = 0$ , otteniamo come frequenza di risonanza per il nostro circuito senza condensatore  $f_0 = 132 \text{ KHz} \pm 1.6 \text{ KHz}$ . Una descrizione più completa del procedimento

effettuato per il calcolo di  $f_0$  con incertezza si trova nella sezione di analisi successiva. Trovata la frequenza di risonanza, la capacità sarà

$$2\pi f_0 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C_L + C_{osc})}} \Leftrightarrow C_L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} - C_{osc} = 35.4 \text{ pF}$$

con incertezza

$$\sigma[C_L] = \sqrt{\left(\frac{\sigma[L]}{4\pi^2 f_0^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[f_0]}{2\pi^2 f_0^3 L}\right)^2 + \sigma[C_{osc}]^2} = 6.8 \text{ pF}.$$

### 3.2.2 Studio della funzione di trasferimento

In questa sezione verrà fatto il confronto dei dati raccolti con il modello reale (o presunto tale) del nostro circuito, che tiene conto degli effetti capacitivi e resistivi dell'induttore, come mostrato nella figura 2. La funzione di trasferimento può comunque essere trovata vedendo il circuito come un partitore di impedenza. Chiamato  $C_{tot} = C + C_{osc} + C_L$ , troviamo

$$H_r(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C_{tot}} \|R_{osc}\| (R_L + j\omega L)}{R + \frac{1}{j\omega C_{tot}} \|R_{osc}\| (R_L + j\omega L)}, \quad (4)$$

sebbene un'espressione analitica di  $|H_r|$  non sia banale è comunque possibile una valutazione numerica con Matlab. Come valore di  $R_L$  in questa equazione utilizziamo inizialmente ancora quello di  $R_{bob}$ .

Per i dati sperimentali di  $|H| = V_{out}/V_{in}$  abbiamo utilizzato l'incertezza data da

$$\sigma[V_{out}/V_{in}] = \sqrt{\left(\frac{\sigma[V_{out}]}{V_{in}}\right)^2 + \left(\frac{V_{out} \sigma[V_{in}]}{V_{in}^2}\right)^2},$$

dove, poiché il fondo scala di  $V_{in}$  è stato mantenuto costante a 500 mV per sezione per tutte le misure, abbiamo

$$\sigma[V_{in}] = \frac{1.5 \times 8 \times 0.5 \text{ V}}{100} = 0.06 \text{ V}.$$

L'incertezza sul voltaggio in uscita invece, essendoci annotati il valore di fondo scala per sezione  $V_{out}FS$  per ogni misura, vale

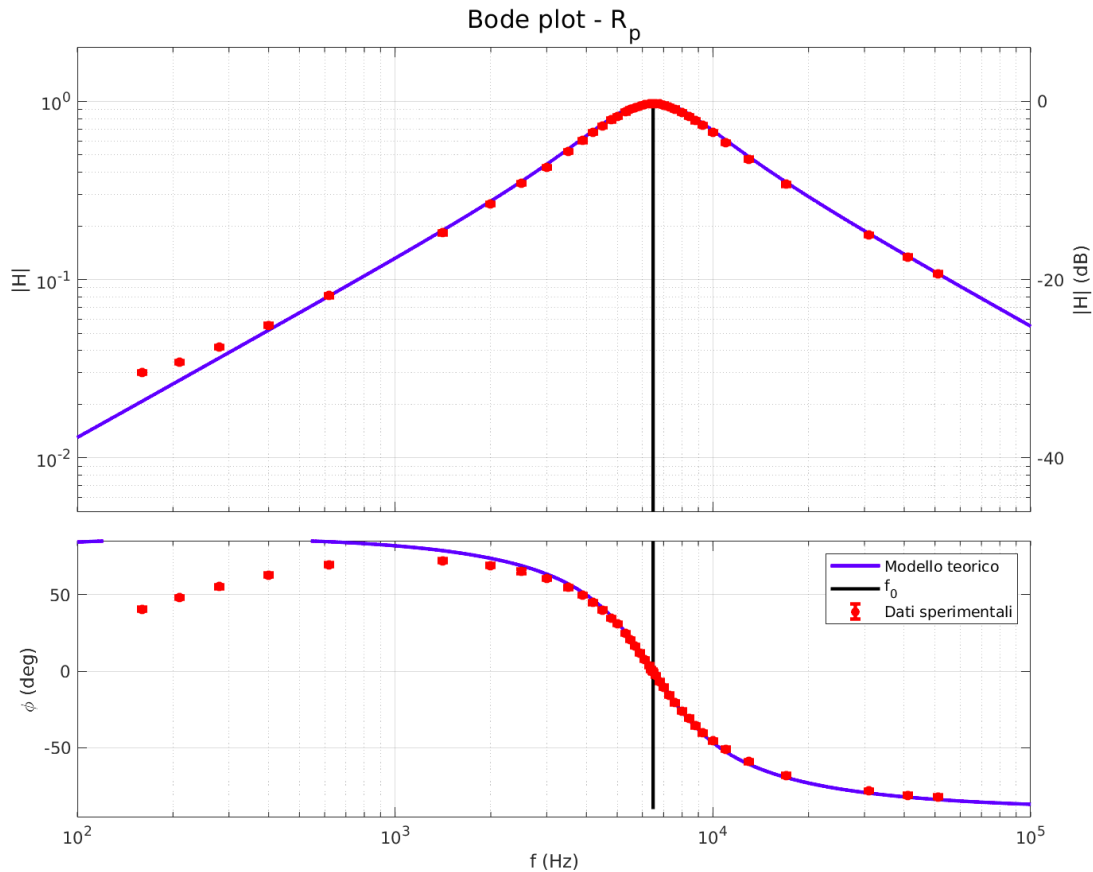
$$\sigma[V_{out}] = \frac{1.5 \times 8 \times V_{out}FS}{100}.$$

I valori di frequenza presi, al contrario di voltaggio e fase, sono quelli forniti dal generatore di funzione d'onda. Avendo quest'ultimo un'incertezza inferiore alle 40ppm, per le nostre misure assumiamo il valore di frequenza privo di incertezza. Per quanto riguarda l'incertezza di fase invece dobbiamo tenere conto degli errori di risoluzione sulla scala temporale dell'oscilloscopio. Se il tempo che intercorre tra il passaggio di due segnali a frequenza  $f$  vale  $\Delta t$ , allora lo sfasamento tra gli stessi è  $\phi = 2\pi f \Delta t$ . L'incertezza su  $\Delta t$  per una misura di fase presa con fondo scala temporale  $t_{FS}$  per divisione sarà

$$\sigma[\Delta t] = 8 \times 10^{-4} \times (t_{FS} \times 10).$$

E allora  $\sigma[\phi] = 2\pi f\sigma[\Delta t]$ .

Nella parte superiore del grafico seguente (Fig.6) sono riportati sia il modulo della funzione di trasferimento ideale  $|H_r|$  che i dati sperimentali  $V_{out}/V_{in}$  in funzione della frequenza per la resistenza minore  $R_p$ . Nella parte inferiore la fase teorica e i valori sperimentali della stessa con incertezza.

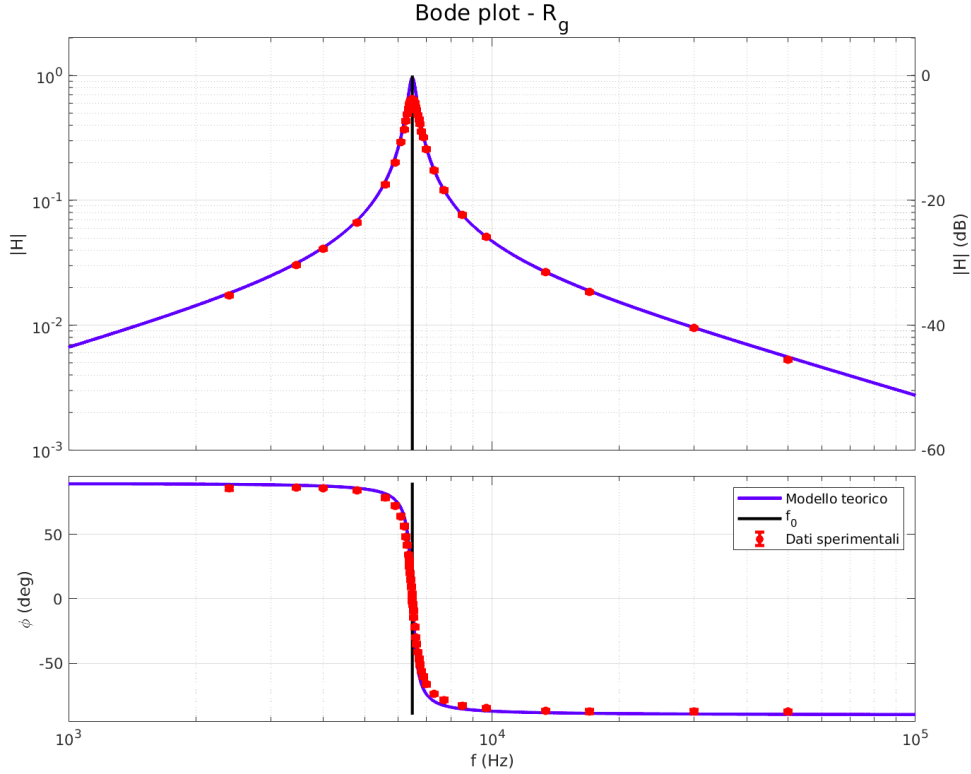


**Figure 6:** Nel grafico in blu  $|H_r|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza.

È subito evidente dal grafico che la maggior parte dei punti sperimentali di  $|H|$  sono in accordo con il modello atteso, ma c'è una leggera discrepanza lontano dal picco a frequenze basse. Per quanto riguarda la fase invece notiamo un'importante deviazione sistematica per tutte le frequenze prese nella decade tra i 100 Hz e i 1000 Hz.

Vediamo nel prossimo grafico (Fig.7)  $|H_r|$  e i dati sperimentali  $V_{out}/V_{in}$  in funzione della frequenza per la resistenza più grande  $R_g$ .

Sebbene con una resistenza maggiore l'effetto sia meno visibile, notiamo che anche in questo caso nel grafico della fase i punti sperimentali più lontani dalla frequenza di risonanza divergono dal valore aspettato del modello. Inoltre vediamo che nel grafico di  $|H|$  alcuni punti in prossimità del picco, quelli con valore di fase compreso fra  $-40^\circ$  e  $40^\circ$



**Figure 7:** Nel grafico in blu  $|H_r|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza.

circa, assumono in ordinata un valore minore di quello assunto dal modello. Vediamo che il punto di discrepanza maggiore è quello con fase 0, che dovrebbe essere alla frequenza di risonanza. L'ampiezza teorica del picco infatti dovrebbe essere 0.960 quando invece quella che viene dall'esperienza è  $0.644 \pm 0.014$ .

Prima di provare un modello alternativo possiamo utilizzare un'analisi simile a quella adottata per trovare  $C_L$  per verificare la compatibilità della frequenza di risonanza  $f_0$  attesa con quella trovata sperimentalmente. A livello teorico  $f_0$  non dovrebbe variare per  $R_g$  e  $R_p$ , valendo

$$f_0^{teo} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{tot}}}.$$

Sostituendo in valori dei nostri parametri otteniamo  $f_0^{teo} = 6478 \text{ Hz} \pm 24 \text{ Hz}$ . L'incertezza è stata calcolata con

$$\sigma[f_0^{teo}] = \sqrt{\left(\frac{\sigma[L]}{4\pi\sqrt{L^3C_{tot}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[C_{tot}]}{4\pi\sqrt{LC_{tot}^3}}\right)^2},$$

dove

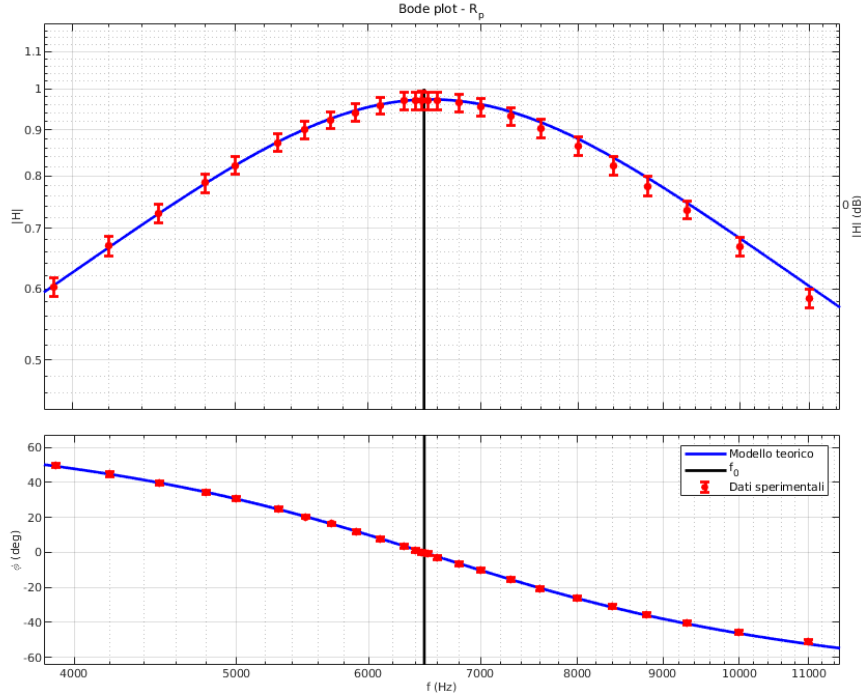
$$\sigma[C_{tot}] = \sqrt{\sigma[C]^2 + \sigma[C_{osc}]^2 + \sigma[C_L]^2}.$$

Non ci resta che trovare il valore di frequenza di risonanza dai dati sperimentali  $f_0^{exp}$ .

Effettuiamo, come per il calcolo di  $C_L$  una regressione lineare sulla fase in funzione della frequenza:

$$\phi = \alpha_p + \beta_p f.$$

Vediamo dal grafico seguente (Fig.8) che l'arcotangente è approssimabile ad una retta in un intervallo di valori di fase che vanno da circa  $-17^\circ$  a  $17^\circ$ . All'interno di questo intervallo abbiamo 11 punti, effettuiamo per questi un fit con il metodo dei minimi quadrati.



**Figure 8:** Nel grafico in blu  $|H_r|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza.

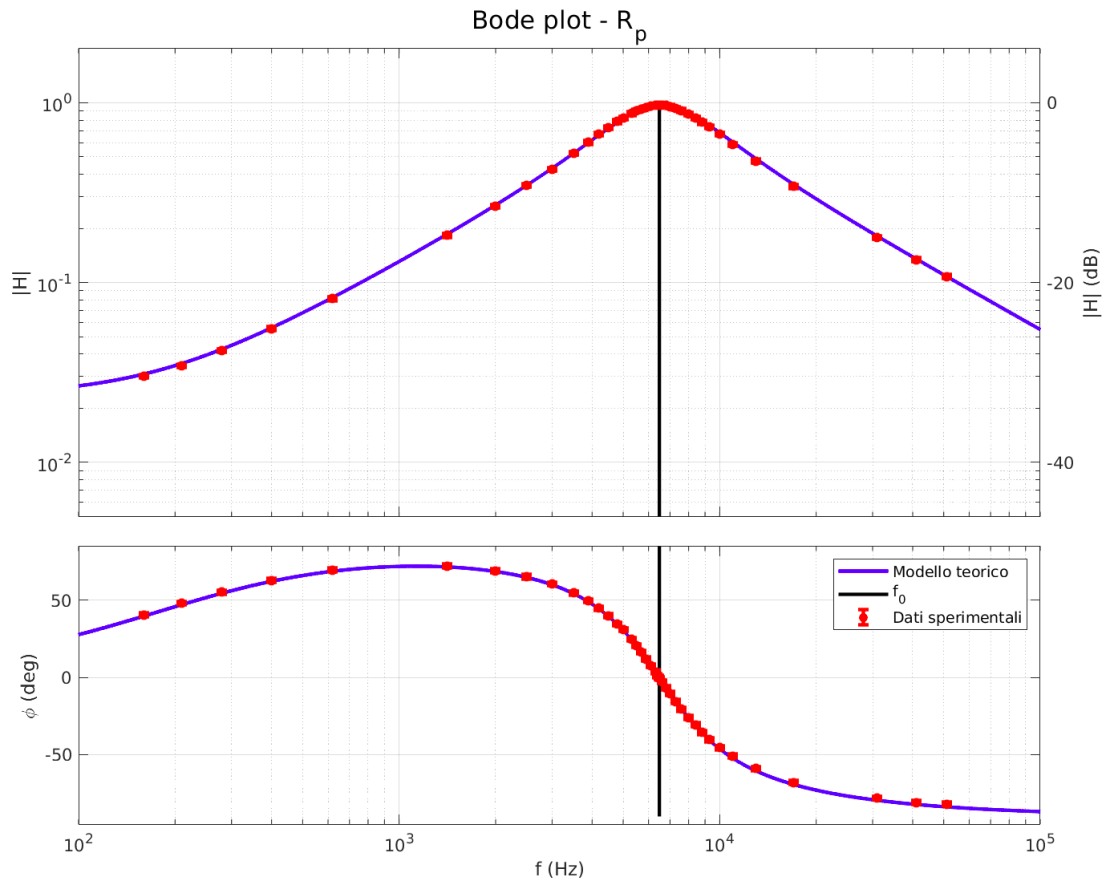
Ci accorgiamo di aver fatto una buona approssimazione prendendo questo intervallo di dati osservando che i residui degli stessi rispetto alla retta teorica calcolata con i minimi quadrati in questo intervallo sembrano disposti casualmente. Otteniamo la tabella di valori seguente

Parametro	Valore
$\alpha_p$	$-130.7^\circ$
$\sigma[\alpha_p]$	$0.1^\circ$
$\beta_p$	$0.02017^\circ s$
$\sigma[\beta_p]$	$0.00002^\circ s$

Si trova allora  $f_{0p}^{exp} = \left| \frac{A}{B} \right| = 6481 \text{ Hz}$  con incertezza

$$\sigma[f_{0p}^{exp}] = \sqrt{\left( \frac{\sigma[\alpha_p]}{B} \right)^2 + \left( \frac{A \sigma[\beta_p]}{B^2} \right)^2} = 7 \text{ Hz}.$$

Con un procedimento analogo calcoliamo la frequenza di risonanza sperimentale per il circuito passa banda con la resistenza maggiore, ottenendo  $f_{0g}^{exp} = 6484 \text{ Hz} \pm 8 \text{ Hz}$ . Notiamo allora che entrambe le frequenze calcolate a partire dai dati da noi raccolti sono in accordo con il valore che ci aspetteremmo dal modello. Osserviamo inoltre che per il calcolo di  $\sigma[f_0^{exp}]$  abbiamo trascurato un fattore di covarianza, che sarebbe risultato negativo, in quanto intercetta e coefficiente angolare trovati con la regressione non sono statisticamente indipendenti, ma correlati poiché evinti dagli stessi dati. Ciò comunque non modifica l'esito di compatibilità poiché i valori medi di  $f_{0p}^{exp}$  e  $f_{0g}^{exp}$  sono distanti meno di uno scarto tipo  $\sigma[f_0^{teo}]$  dal valore centrale di frequenza di risonanza teorica  $f_0^{teo}$ . Questo risultato ci dà anche una conferma della misura di  $L$  stimata nella sezione precedente. Proviamo ora a prendere come valore di resistenza dell'induttore quello trovato nella parte di analisi del circuito  $RL$  passa basso anziché quello misurato con il DMM. Il risultato, apprezzabile nel grafico seguente (Fig.9), è nettamente migliore del precedente per quanto riguarda le basse frequenze del circuito con resistenza minore.

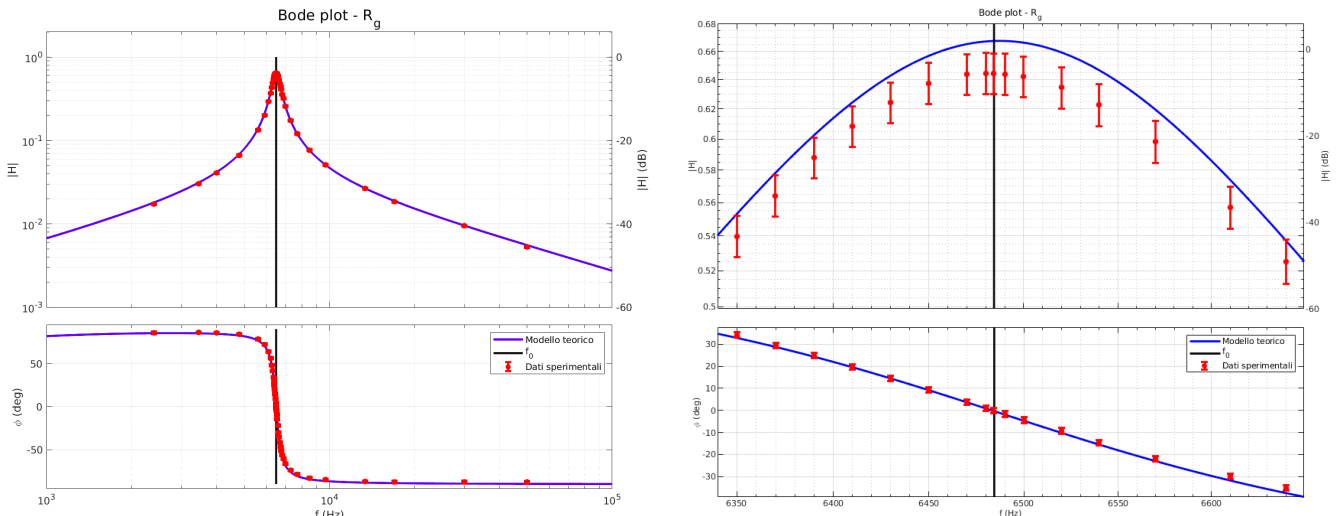


**Figure 9:** Nel grafico in blu  $|H_r|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza.

I valori di fase sperimentali sono ora discrepanti da quelli teorici di, al massimo, 2.3 scarti tipo. Quelli di  $|H|$  invece sono in accordo con  $|H_r|$  entro una deviazione standard.

Anche per la resistenza maggiore avviene un netto miglioramento di compatibilità

(Fig.10). Avendo applicato questa modifica l'ampiezza teorica di  $|H_r|$  risulta essere 0.668, la quale risulta in accordo con quella sperimentale che vale  $0.644 \pm 0.014$  entro due scarti tipo. Nonostante la compatibilità sia migliorata è evidente che i dati in prossimità del picco



**Figure 10:** Nel grafico sulla sinistra in blu  $|H_r|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza. Sulla destra uno zoom in prossimità della frequenza di risonanza.

assumano sistematicamente valori inferiori rispetto a quelli previsti. Per spiegare questa deviazione possiamo partire dal fatto che ciò che emerge dall'analisi circuitale precedente è che il valore di resistenza  $R_L$  non sia quello misurato con il multimetro, ma assuma un valore maggiore. Ciò è dovuto alla presenza di attrito magnetico nel nostro induttore, dipendendo questa forma di attrito dalla corrente si spiega perché la misura di resistenza con il DMM risulti differente da quella evinta dai dati. Sappiamo che nel circuito  $RLC$  passa banda la corrente che passa attraverso l'induttore varia al variare della frequenza, ne consegue che il valore di  $R_L$  che dovesse tenere conto dell'attrito magnetico dovrebbe essere della forma

$$R_L = R_{bob} + g(\omega),$$

con  $g(\omega)$  una qualche funzione dipendente dalla frequenza.

A questo punto si spiega perché il valore di  $R_L$  mantenuto costante vada a rappresentare accuratamente la distribuzione dei dati solamente per alcuni intervalli di frequenza (quelli bassi), e presenti invece lievi (ma sistematiche) divergenze in altri intervalli, come intorno al picco per  $R_g$ .

In questa ultima parte di analisi valutiamo il comportamento del nostro circuito per frequenze molto maggiori e molto minori della frequenza di risonanza.

Quando siamo a basse frequenze, il nostro circuito è ad un regime "quasi-DC" per il quale la tensione risulta costante rispetto al tempo caratteristico  $\tau$  di carica e scarica del con-



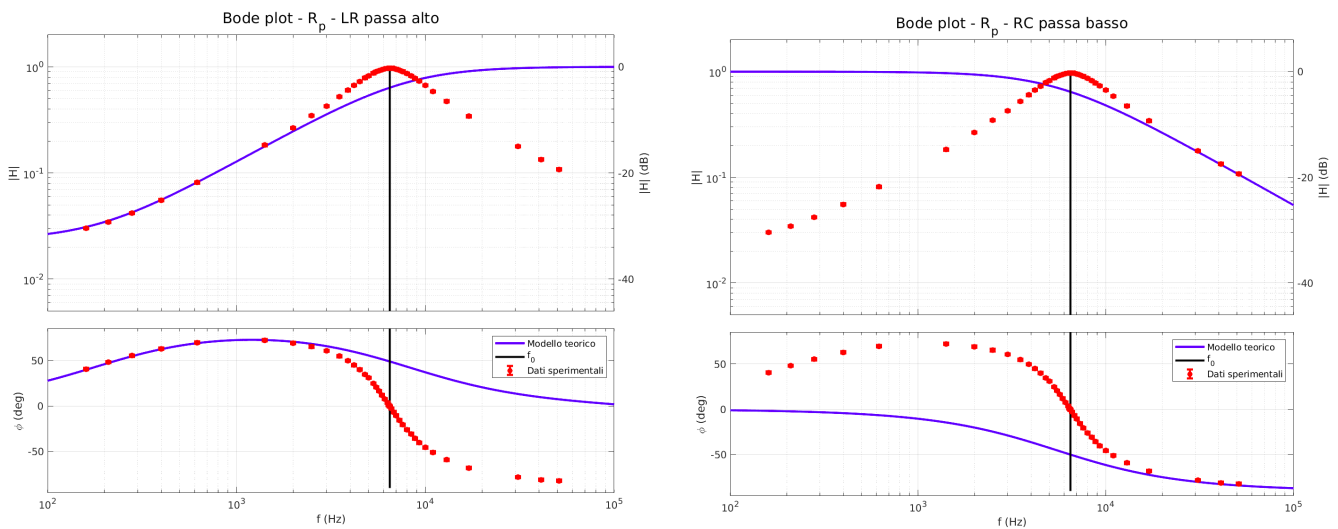
denatore  $C_{tot}$ , possiamo pertanto considerare  $C_{tot}$  come un circuito aperto. Allora quello che abbiamo è un circuito  $RL$  passa alto, con funzione di trasferimento

$$H_{RL}(\omega) = \frac{R_{osc} \parallel (R_L + j\omega L)}{R + (R_{osc} \parallel (R_L + j\omega L))}.$$

Nel limite in cui invece la frequenza nel circuito è molto maggiore di quella di risonanza avviene che l'induttanza può essere vista come un circuito aperto, in questo modo il circuito iniziale non diventa altro che un  $RC$  passa basso. Sappiamo che per questo la funzione di trasferimento è

$$H_{RC}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\omega RC_{tot}}.$$

Come verifica sperimentale possiamo effettivamente vedere nella coppia di grafici seguente (Fig.11), riferiti alla resistenza più piccola, che i dati si adattano al modello di circuito  $RL$  passa basso quando le frequenze sono nella decade da  $100\text{ Hz}$  a  $1\text{ KHz}$ , mentre per i dati presi a frequenze più elevate di  $20\text{ KHz}$  sembrano seguire l'andamento dettato dalla funzione di trasferimento di un  $RC$  passa basso.



**Figure 11:** Nel grafico sulla sinistra in blu  $|H_{RL}|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. Sulla destra in blu  $|H_{RC}|$  e fase teorica, in rosso i punti sperimentali. La linea nera verticale rappresenta invece il valore teorico della frequenza di risonanza.