

# Terza esperienza di laboratorio - Relazione

**Gruppo L12**

Dal Farra Filippo, Garbi Luca, Libardi Gabriele

18 Maggio 2018

## Contents

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Materiali</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Procedure di misura</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Analisi dei dati</b>	<b>6</b>
4.1	Dipendenza del periodo del pendolo dalla massa . . .	6
4.2	Dipendenza del periodo del pendolo dalla lunghezza .	10

## 1 Abstract

In questa esperienza di laboratorio si verificherà quantitativamente la dipendenza del periodo  $\mathcal{T}$  di un pendolo dalla lunghezza  $\ell$  dello stesso e dalla massa  $m$  del peso applicato. In particolare si partirà da un'analisi dimensionale e si arriverà ad esprimere queste relazioni mediante un limite superiore per la dipendenza dalla massa e un modello lineare per la dipendenza dalla lunghezza  $\ell$ . Nell'analisi dei dati sarà affrontata la trattazione delle incertezze, soprattutto di risoluzione e di tipo "A", emersi durante la sessione in laboratorio dove per le misure di periodo è stato usato un microcontrollore con una barriera infrarossi. Nello sviluppo dell'esperienza verranno costruiti grafici logaritmici per linearizzare equazioni esponenziali, verranno fatte applicazioni della regressione lineare, del test del chi quadrato e in generale della propagazione dell'incertezza. Al termine verrà calcolato il valore dell'accelerazione di gravità in diversi modi, comunque a partire dai dati sperimentali delle misure del periodo del pendolo, e verranno confrontati con il valore dato dai valori tabulati (a Povo  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$ ).

## 2 Materiali

- Filo da lenza;
- Cilindri di diverse masse;
- Flessometro (risoluzione di lettura 1 *mm*);
- Supporto verticale;
- Calibro ventesimale (risoluzione di lettura 0.05 *mm*);
- Bilancia elettronica (risoluzione di lettura 0.1 *g*);
- Cronometro digitale (risoluzione di lettura 0.01 *s*);
- Arduino<sup>®</sup> Uno Rev3;
- Led e fototransistor infrarosso, jumper e altri componenti elettroniche.

## 3 Procedure di misura

L'intera esperienza è stata svolta nell'arco di una sessione di laboratorio. Come prima cosa è stata presa la misura del periodo di un pendolo con 4 masse differenti, ma mantenendo invariata la lunghezza. La seconda parte dell'esperienza invece consisteva nel misurare il periodo del pendolo, tenendo la stessa massa, ma usando valori diversi di lunghezza del pendolo.

Il pendolo è composto da un filo da lenza appeso ad un supporto scorrevole verticale di altezza variabile, all'altra estremità del filo è appeso un cilindro che per i nostri fini può essere considerato di materiale omogeneo. Per questa esperienza può essere trascurata anche l'estensibilità del filo. Cilindro e filo sono collegati da un dado a cupola forato che si attacca attraverso una vite filettata presente ad

un'estremità del cilindro. Nella fase di pesatura delle masse con la bilancia elettronica abbiamo messo sul piatto sia cilindri che dado. La misura delle lunghezze del pendolo invece è stata effettuata con il flessometro a partire dall'attacco del filo al supporto fino al baricentro dei cilindri che talvolta avevano volumi e altezze differenti. Per la misurazione del periodo invece è stato allestito un piccolo circuito elettronico che sfrutta un sensore infrarossi.

Infatti su due breadboard ad una distanza di circa 15 *mm* sono stati montati un led IR e un fototransistor IR, collegati entrambi alla scheda elettronica Arduino<sup>®</sup> Uno dotata di microcontrollore. Le misurazioni sono avvenute in questo modo: il rilevatore veniva posizionato ad un'altezza tale che il filo del pendolo appena sopra il cilindro passasse tra led e fototransistor una volta che al pendolo veniva data un'ampiezza di oscillazione di circa 10 gradi. Successivamente la massa veniva lasciata libera di oscillare, le prime oscillazioni del pendolo sono state trascurate in tutte le misure poiché il cilindro non era stabile in quanto presentava anche sue oscillazioni locali. Una volta stabilizzate queste ultime veniva eseguito lo sketch che faceva partire il cronometro interno del microcontrollore (risoluzione dello strumento  $\Delta\mathcal{T} = 10^{-5} s$ ) non appena il filo interrompeva la barriera infrarossi. Il cronometro si fermava e ritornava il valore acquisito automaticamente alla fine della quinta oscillazione quando il filo interrompeva di nuovo la barriera IR. Prima della effettiva acquisizione dei dati è stata effettuata una verifica di corretta calibrazione dell'Arduino, verificando che il periodo fornito da quest'ultimo coincidesse con quello misurato con l'oscilloscopio presente in laboratorio, il quale era stato collegato allo stesso circuito.

## 4 Analisi dei dati

Se supponiamo che il periodo del pendolo possa dipendere solo dalla lunghezza dello stesso, dalla massa appesa e dall'accelerazione di gravità  $g$ , da un'analisi dimensionale si arriva ad un'equazione ( $\mathcal{T} = C \sqrt{\ell/g}$ ) che ci rivela che  $\mathcal{T}$  non dipende dalla massa ma è proporzionale alla radice della lunghezza su  $g$ , moltiplicata per una costante non determinabile dal calcolo dimensionale.

Nella successiva analisi verranno analizzati separatamente i dati acquisiti per verificare se la relazione tra periodo e massa e tra periodo e lunghezza del pendolo sono effettivamente in accordo con la teoria ed entro quali incertezze.

### 4.1 Dipendenza del periodo del pendolo dalla massa

Per questa parte di esperienza è stata mantenuta invariata la lunghezza del pendolo a  $80 \pm 0.05 \text{ cm}$ , mentre sono state cambiate quattro masse differenti. Per le prime tre masse il volume del cilindro appeso è rimasto invariato in quanto cambiava il materiale di composizione: plastica ( $88.80(5) \text{ g}$ ), alluminio ( $161.30(5) \text{ g}$ ) e ottone ( $495.30(5) \text{ g}$ ). Per l'ultima massa abbiamo unito, tramite una vite filettata predisposta sui cilindri, il cilindro di ottone con un altro dello stesso materiale ma con altezza minore. In questa ultima misura è stata fatta attenzione a riportare la lunghezza del pendolo a  $80 \pm 0.05 \text{ cm}$  calcolati dal supporto al baricentro del sistema delle due masse unite. Il diametro, misurato con il calibro, di tutti i cilindri utilizzati è di  $40 \pm 0.03 \text{ mm}$  mentre l'altezza dei primi 3 è  $47 \pm 0.03 \text{ mm}$ , infine il sistema composto dai due cilindri di ottone attaccati è  $66 \pm 0.03 \text{ mm}$ .

In questo grafico (Fig.1) sono rappresentati i risultati del set di misure. In ordinata ci sono le medie campionarie dei periodi con relative barre d'errore, mentre in ascissa ci sono i valori delle masse. Per il calcolo dell'incertezza sulle masse, che è uguale per tutti i cilindri, si è utilizzato lo scarto tipo per errori di risoluzione, quindi dato  $\Delta M = 0.1 \text{ g}$  la risoluzione di lettura della bilancia, si ha  $\delta_m = \Delta M/\sqrt{12} \simeq 0.03 \text{ g}$ .

Grafico del periodo in funzione della massa

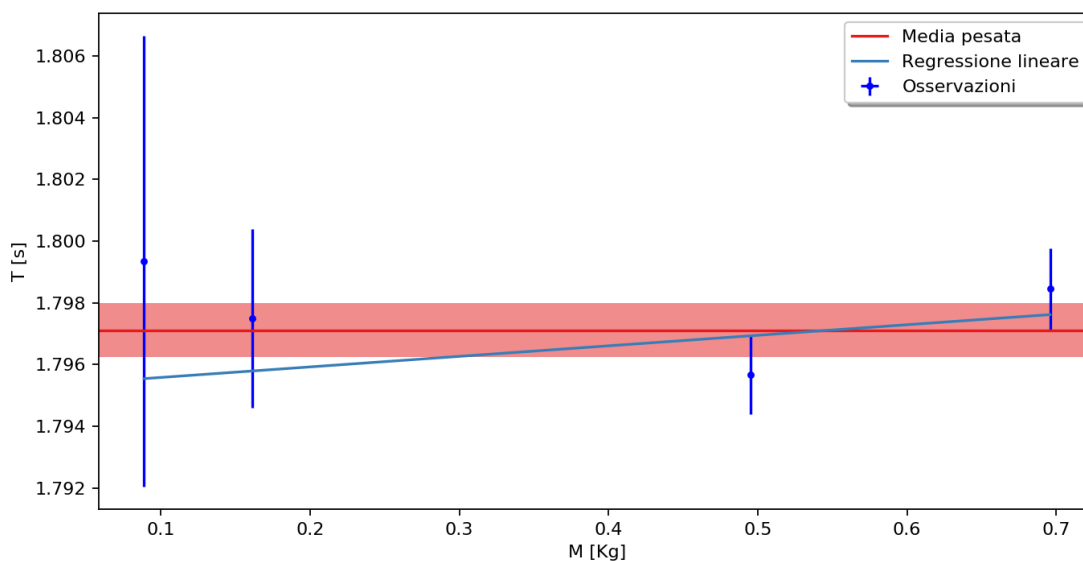


Figure 1: Grafico del periodo in funzione della massa. In azzurro la retta ottenuta attraverso la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati, in rosso la media pesata delle misure di tempo, con il suo intervallo di incertezza.

Il calcolo dell'incertezza sul periodo invece è dato dalla somma quadratica delle incertezze di risoluzione ( $\Delta T_s = 10^{-5} \text{ s}$ ) e di quelle casuali. Teniamo anche conto del fatto che abbiamo preso il periodo di 5 oscillazioni consecutive quindi la risoluzione dello strumento va ulteriormente ridotta di un fattore 5. Inoltre per ogni massa sono state prese 10 misure delle 5 oscillazioni, quindi nel calcolare il contributo

degli errori casuali prendiamo lo scarto tipo delle medie con  $N = 10$ .

Si ha la seguente:

$$\sigma[\mathcal{T}_i] = \sqrt{\left(\frac{\Delta T_s}{5\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{cas}[\mathcal{T}_i]}{\sqrt{10}}\right)^2}. \quad (1)$$

Nel grafico osserviamo subito la notevole differenza tra le barre d'errore relativo alle masse diverse. Possiamo ipotizzare che questa differenza sia dovuta a due fattori principalmente: il primo è che è possibile che abbiamo affinato la metodologia di misura (ad esempio il rilascio del peso o la scelta del momento in cui far partire lo sketch) sempre più nel tempo. Il secondo fattore che potrebbe spiegare la differenza è che si notano meno oscillazioni intrinseche del cilindro quando quest'ultimo pesa di più, quindi ciò avrebbe potuto condizionare meno la misura complessiva del periodo.

Nella Fig.1 sono state inserite anche due rette. Una, di colore rosso, rappresenta la media pesata dei periodi delle diverse masse ed è raffigurata con il relativo intervallo di incertezza. La azzurra blu invece è stata ottenuta attraverso la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati.

Il valore del periodo calcolato con la media pesata è  $\mathcal{T}_w = 1.7971 \pm 0.0009$  s, notiamo anche solo graficamente che le misure sono coerenti con l'ipotesi che il periodo non cambi in funzione della massa. Questa può essere corroborata ancora di più effettuando un test del chi quadrato sul modello dato dalla media pesata e sui dati osservati. Avendo 4 dati e un solo parametro che può variare (l'intercetta della retta costante) il  $\chi^2$  atteso è 3. Possiamo effettuare un test one-sided scegliendo una probabilità di falso allarme dell'1% per il nostro  $\chi_{oss}^2$ , il nostro intervallo di accettazione allora arriva ad un valore  $\chi_{sup}^2 = 11.3$ . Quello osservato invece è:

$$\chi_{oss}^2 = \sum_{i=1}^4 w_i [\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_w]^2 \simeq 2.4, \quad (2)$$



dove con  $w_i$  si è indicato il peso  $1/(\sigma[\mathcal{T}_i])^2$ . Dal test emerge quindi che le nostre osservazioni sono abbondantemente compatibili con un modello di legge in cui il periodo rimane costante al variare della massa.

Avendo supposto invece che la legge che lega periodo e massa sia della forma:

$$y = A + Bx, \quad (3)$$

con  $y \doteq \mathcal{T}$ ,  $x \doteq m$ , utilizziamo il metodo dei minimi quadrati per trovare i valori dei parametri  $A$  e  $B$  con relative incertezze.

Otteniamo la tabella seguente:

Parametro	Valore
$A$	1.795 $s$
$B$	0.003 $s/kg$
$\sigma[A]$	0.003 $s$
$\sigma[B]$	0.005 $s/kg$

Si può subito notare che il valore di  $B$  con la sua incertezza è compatibile con 0, quindi la retta è coerente con il modello costante. Osserviamo anche che il valore dell'intercetta  $A$  è compatibile con il valore della media pesata  $\mathcal{T}_w$ . Possiamo anche in questo caso effettuare un test del  $\chi^2$  per verificare la bontà del nostro fit. Tenendo presente che in questo caso però i gradi di libertà sono solamente 2 poiché i parametri della retta sono 2. Fissando ancora una probabilità di falso allarme dell'1% per un test one-sided abbiamo un intervallo di accettazione che arriva ad un valore di  $\chi_{sup}^2 = 9.21$ .

Il nostro  $\chi_{oss}^2$  è invece 1.98 quindi anche in questo caso possiamo confermare l'ipotesi inizialmente suggerita dall'analisi dimensionale che il periodo non dipenda dalla massa appesa al pendolo.

Possiamo stabilire un limite superiore al valore della pendenza  $B$  che può assumere la nostra retta. Se scegliamo un fattore di coper-

tura pari a 3 allora il massimo valore di  $B$  è  $B_{max} = B + 3\sigma[B] = 0.018 \text{ s/kg}$ , mentre  $B_{min} = B - 3\sigma[B] = -0.012 \text{ s/kg}$ . Quindi ipotizzando una distribuzione normale del valore di  $B$ , la probabilità che il valore vero della pendenza sia all'interno dell'intervallo  $[B_{min}, B_{max}]$  è del 99.73%.

## 4.2 Dipendenza del periodo del pendolo dalla lunghezza

In questa parte di esperienza la lunghezza del pendolo è stata fatta variare di 10 cm in 10 cm, partendo da 1 metro di lunghezza, fino ad arrivare a 10 cm. Sono state effettuate 10 misure di 5 oscillazioni complessive del pendolo per ogni lunghezza. Per limitare al minimo l'effetto del pendolo fisico sulle misure abbiamo utilizzato il cilindro più piccolo a disposizione, ovvero quello in ottone di  $40 \pm 0.03 \text{ mm}$  di diametro e  $19 \pm 0.03 \text{ mm}$  in altezza.

Nel grafico seguente (Fig.2 a sinistra) sono rappresentati i dati raccolti del periodo in funzione della lunghezza del pendolo con barre d'errore. L'incertezza sulle ascisse è la medesima per tutte le misure ed è semplicemente quella data dalla risoluzione del flessometro  $\sigma[\ell] = \Delta\ell/\sqrt{12} = 0.003 \text{ cm}$ . Lo scarto tipo sul periodo invece è stato calcolato analogamente alla prima parte dell'esperienza (Formula 1) in quanto sono state fatte anche in questa 10 misure di 5 oscillazioni. La retta rossa rappresenta un tentativo di fit dei dati attraverso il metodo dei minimi quadrati ipotizzando che la legge che lega periodo e lunghezza sia del tipo lineare  $\mathcal{T} = A + B\ell$ . È evidente anche solo graficamente che i dati non rispettano una legge di questo tipo. Per convincercene ancora di più possiamo osservare il grafico dei residui (Fig.2 a destra), nel quale notiamo la forte regolarità della distribuzione degli stessi, comunque in valori non compatibili con 0. Volendo comunque fare un test del chi quadrato osserviamo che i gradi di libertà a disposizione sono 8, mentre il nostro  $\chi_{oss}^2$  è 17659,

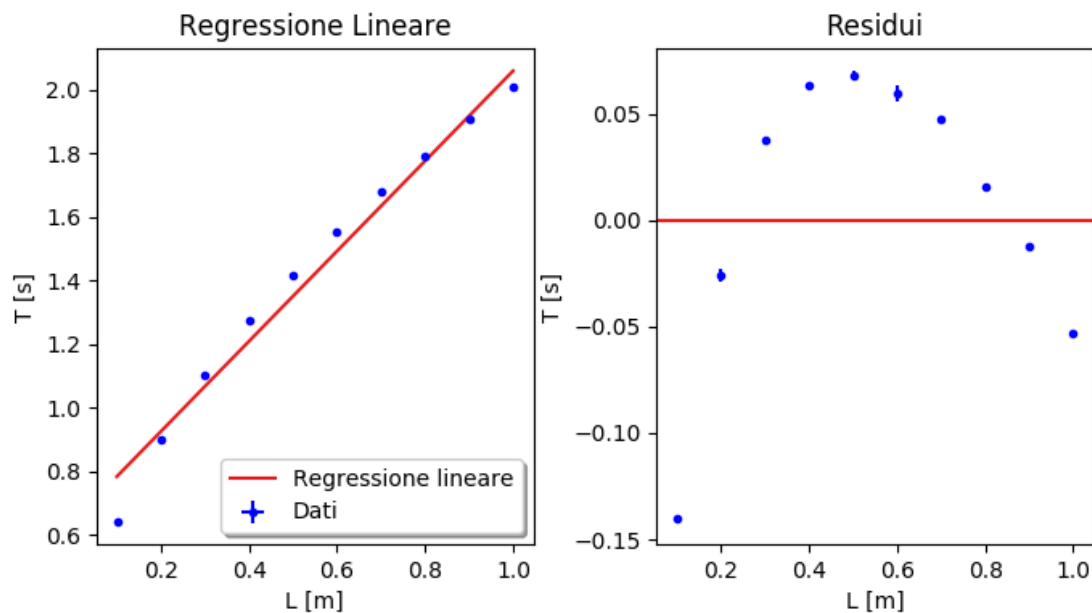


Figure 2: A sinistra un grafico del periodo misurato in funzione della lunghezza del pendolo, la retta rossa rappresenta un modello lineare ottenuto con i minimi quadrati. Sulla destra il grafico dei residui dei dati e del modello lineare.

quindi è fuori discussione la probabilità che la legge lineare ben rappresenti i dati osservati. Questo era comunque un risultato che ci aspettavamo in seguito all'analisi dimensionale preliminare che lega proporzionalmente  $\mathcal{T}$  e  $\ell^{1/2}$ .

Ad ogni modo notiamo che, anche se magari non quadratica, la legge che lega queste due grandezze è della forma  $\mathcal{T} = a\ell^b$ , con  $a$  e  $b$  parametri incogniti. Possiamo cercare di effettuare un fit a partire da questa formula e verificare se il valore trovato di  $a$  e  $b$  sia effettivamente in accordo con quanto suggerito dall'analisi dimensionale. Per effettuare il fit è comodo passare a coordinate logaritmiche, molto utili nel caso di leggi non lineari. Introduciamo le variabili  $X = \log(\ell)$  e  $Y = \log(\mathcal{T})$ , la relazione precedente può allora essere espressa come  $Y = A + BX$  se scegliamo  $a \doteq 10^A$  e  $b \doteq B$ . Le

incertezze su  $X$  e  $Y$  sono date da:

$$\sigma[X_i] = \left| \frac{dX}{d\ell} \right|_i \sigma[\ell] = \frac{\log_{10}(e)}{\ell_i} \sigma[\ell]. \quad (4)$$

$$\sigma[Y_i] = \left| \frac{dY}{d\mathcal{T}} \right|_i \sigma[\mathcal{T}_i] = \frac{\log_{10}(e)}{\mathcal{T}_i} \sigma[\mathcal{T}_i]. \quad (5)$$

Nella coppia di grafici seguente (Fig.3), sono rappresentati i dati misurati di periodo in funzione della lunghezza del pendolo.

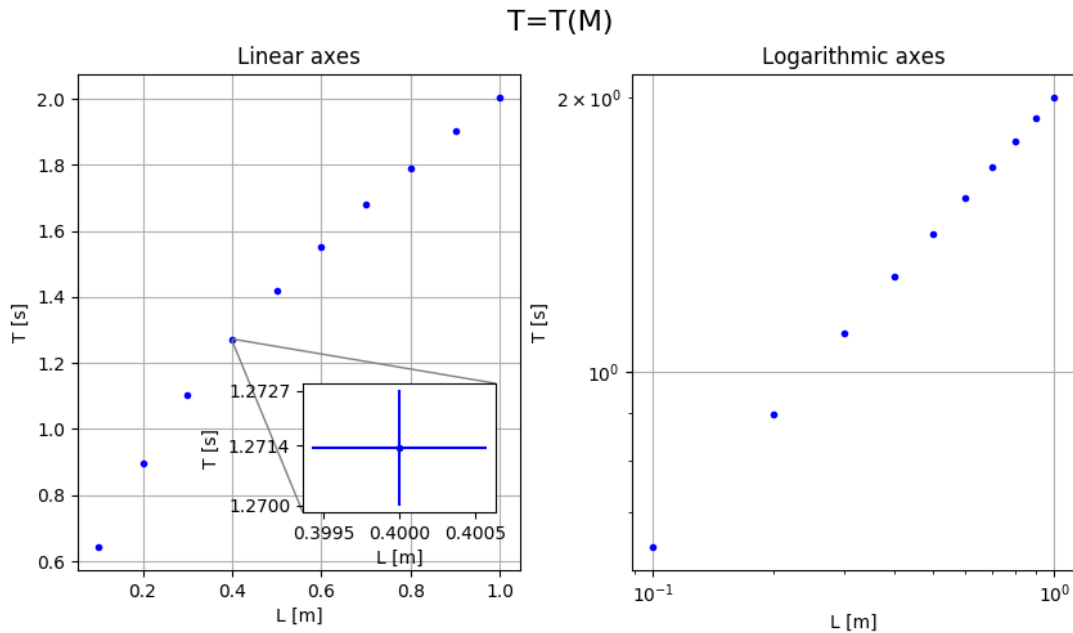


Figure 3: Il grafico di sinistra è quello del periodo misurato in funzione della lunghezza del pendolo. Sulla destra sono rappresentati gli stessi punti sperimentali però su scala logaritmica.

A sinistra la scala è lineare, mentre nel grafico a destra la scala è logaritmica. Raffigurare i punti su una scala logaritmica è equivalente ad effettuare il grafico su scala lineare dei punti sperimentali in funzione di  $X$  e  $Y$ . Notiamo a questo punto che nel grafico a destra i punti sembrano decisamente distribuiti secondo una legge lineare, quale è  $Y = A + BX$ . Possiamo a questo punto trovarci

i valori di  $A$  e  $B$ , con le loro incertezze, attraverso la regressione lineare che ci dà i valori dei due parametri della retta che minimizzano le discrepanze tra modello e punti osservati. Questo metodo però non tiene conto delle incertezze su  $X$ , quindi prima di applicarlo calcoliamo una stima di  $B$  in modo grafico per poi *trasferire* le incertezze di lunghezza in incertezze sulla  $Y$ . Abbiamo quindi che l'incertezza totale sulla  $Y$  è  $\sigma[Y_i]_{tot} = \sqrt{\sigma[Y_i]^2 + \sigma[Y_i]_{tr}^2}$ , dove  $\sigma[Y_i]_{tr} = |B_{graf}| \sigma[X_i]$ .

A questo punto, tenendo presente che  $a \doteq 10^A$  e che  $\sigma[a] = \left| \frac{da}{dA} \right| \sigma[A]$  abbiamo la seguente tabella di valori:

Parametro	Valore
$A$	0.30232
$\sigma[A]$	0.00018
$B = b$	0.4963
$\sigma[B] = \sigma[b]$	0.0008
$a$	$2.0060 \text{ s}/\sqrt{m}$
$\sigma[a]$	$0.0008 \text{ s}/\sqrt{m}$

L'unità di misura per  $a$  è stata assegnata a partire dalla legge  $\mathcal{T} = a\ell^b$ .

Nel grafico sottostante (Fig.4 a sinistra) oltre al logaritmo dei dati di periodo e lunghezza è stata rappresentata la retta con i parametri  $A$  e  $B$  della tabella sopra. In quello a destra invece è stato fatto il plot dei residui rispetto alla retta, notiamo che sono distribuiti in maniera casuale e per la maggior parte assumono valori compatibili con 0.

A questo punto possiamo effettuare un test del chi quadrato per verificare quantitativamente la validità della relazione  $Y = A + BX$ . Sappiamo che i gradi di libertà, e quindi il valore del  $\chi^2$  atteso, sono 8, se effettuiamo un test one-sided con probabilità di falso al-

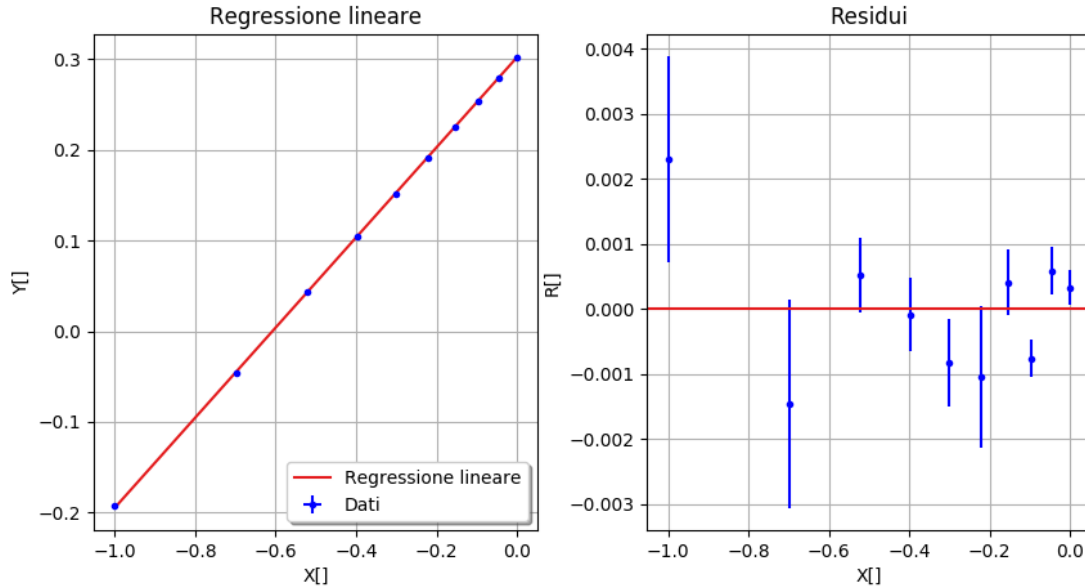


Figure 4: A sinistra il grafico in scala lineare del logaritmo del periodo misurato in funzione del logaritmo della lunghezza del pendolo, la retta rossa rappresenta il modello lineare ottenuto con i minimi quadrati. Sulla destra il grafico dei residui dei dati e del modello lineare.

larme all'1%, l'intervallo di accettazione arriva a  $\chi_{sup}^2 = 20.1$ . Il nostro valore è  $\chi_{oss}^2 = 18.1$ , quindi all'interno dell'intervallo di accettazione, anche se non troppo vicino al valore di 8, questo ci suggerisce che potremmo aver sottostimato le incertezze.

A partire dalla tabella con i parametri della retta possiamo fare un'osservazione, ovvero che il valore di  $b$  con la sua incertezza è non compatibile con 0.5 che era il valore che ci aspettavamo di trovare. Infatti eravamo partiti dall'ipotesi di una legge del tipo  $\mathcal{T} = a\ell^b$ , allora se  $b$  è compatibile con  $1/2$  questo significa che la relazione data dall'analisi dimensionale è coerente con i risultati dell'esperienza, invece nel nostro caso dobbiamo concludere che questa legge non spiega bene i dati osservati.

Possiamo, al contrario, anche partire dall'equazione data dalla teoria dell'oscillatore armonico  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  per stimare un valore di  $g$  dai nostri dati e verificare se è in accordo con il valore tabulato. La formula è quindi  $g = (2\pi/\mathcal{T})^2\ell$ . L'incertezza tipo sulle  $g$  calcolate a partire dalle varie misure di lunghezza è la somma quadratica dei contributi di incertezza propagata di  $\ell$  e di  $\mathcal{T}$ :

$$\sigma[g_i] \simeq \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}_i}\right)^4 (\sigma[\ell_i])^2 + \left(\frac{8\pi^2\ell_i}{\mathcal{T}_i^3}\right)^2 (\sigma[\mathcal{T}_i])^2}. \quad (6)$$

Per vedere quale dei due contributi sia più influente nella determinazione dell'incertezza totale di  $g$  possiamo fare un grafico (Fig.5) del contributo dato dall'incertezza della lunghezza (in blu) e dall'incertezza sul periodo (in verde) in funzione dell' $i$ -esima misura di lunghezza. La spezzata rossa è la somma quadratica delle altre due. Dal grafico è evidente la predominanza del contributo di incertezza dovuto a  $\mathcal{T}$  che, a parte che per il pendolo di lunghezza 10 cm, è sempre maggiore di quello dato da  $\ell$ .

Notiamo anche che l'incertezza totale sulla  $g$  in media diminuisce quanto più il pendolo è lungo. Questo ci fa sospettare che l'incertezza totale non sia solo frutto di errori casuali, ma che ci siano anche variazioni di natura sistematica. Queste ultime possono essere ricondotte a due motivi principali che potrebbero concorrere alla sistematicità degli errori e derivano dalle approssimazioni fatte per esprimere l'accelerazione di gravità tramite la relazione  $g = (2\pi/\mathcal{T})^2\ell$ . La prima approssimazione fatta è quella del *pendolo semplice*, infatti viene considerata la massa priva di dimensioni e il filo inestensibile oltre che privo di massa. Se però il cilindro appeso ha un volume che può essere considerato trascurabile quando il pendolo ha una lunghezza di 1 metro, non può più venire trascurato quando la lunghezza è 10 cm o 20 cm, ovvero quando l'altezza  $h$  del cilindro è un quinto o un decimo di quella totale del pendolo. Un ulteriore sis-

### Confronto contributo incertezze per g

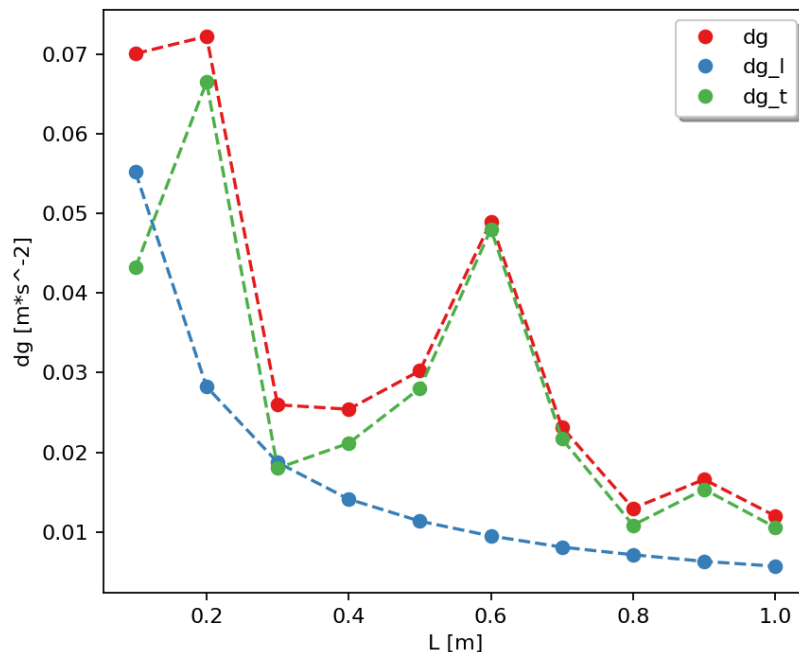


Figure 5: In ordinata il contributo di incertezza su  $g$  in funzione della lunghezza del pendolo.

tematico può essere ricondotto all'approssimazione dei piccoli angoli, per la quale una volta scritta l'equazione del moto di un pendolo, il fattore  $\sin(\theta)$  viene approssimato al primo ordine del suo polinomio di Maclaurin con  $\theta$ . Anche in questo caso se l'approssimazione è controllabile su grandi scale di lunghezza, più  $\ell$  diventa piccolo e più è difficile partire da piccoli angoli di oscillazione per misurare il periodo con una certa precisione, anche perché  $\mathcal{T}$  è più breve quando la lunghezza è piccola. In conclusione quindi, per minimizzare gli errori sistematici su piccoli valori di  $\ell$ , si potrebbe migliorare la relazione di partenza  $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  con una relazione più accurata,



seppur ancora approssimata:

$$\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right], \quad (7)$$

dove  $R$  è il raggio del cilindro,  $I$  è il momento d'inerzia del pendolo che, nel nostro caso (e trascurando la massa del filo), è  $I = m\ell^2 + (1/4)mR^2 + (1/12)mh^2$  e  $\theta_0$  è l'ampiezza di oscillazione.

Nel grafico seguente (Fig.6) in blu troviamo i valori di  $g$  ottenuti mediante l'approssimazione di piccoli angoli e di pendolo semplice, con incertezza data dalla (6). In rosso invece i valori  $g_i$  dati da:

$$g_i = \left( \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \sqrt{\frac{I}{m\ell}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right)^2, \quad (8)$$

dove con  $\theta_0$  abbiamo utilizzato  $10^\circ$ . Come incertezza su questi  $g_i$  è stata utilizzata:

$$\begin{aligned} (\sigma[g_i]_{fis})^2 &\simeq \left( \frac{\partial g}{\partial \mathcal{T}} \right)_i^2 (\sigma[\mathcal{T}_i])^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial \ell} \right)_i^2 (\sigma[\ell_i])^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)_i^2 (\sigma[\theta])^2 \\ &+ \left( \frac{\partial g}{\partial h} \right)_i^2 (\sigma[h])^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial R} \right)_i^2 (\sigma[R])^2. \end{aligned}$$

Dove come  $\sigma[h] = \sigma[R]$  è stato utilizzato lo scarto tipo delle incertezze di risoluzione sul calibro ventesimale e come  $\sigma[\theta]$  abbiamo fissato il valore di 2 gradi sessagesimali poiché è indicativamente l'errore commesso da noi nella misurazione dell'ampiezza dell'angolo. Nel grafico oltre ai dati sono state tracciate tre rette orizzontali, due delle quali con incertezza. La retta nera, senza intervallo di incertezza, rappresenta il valore tabulato di  $g$  a Povo pari a  $9.806 \text{ m s}^{-2}$ , quella di color azzurro con il più ampio intervallo di incertezza rappresenta la semplice media aritmetica dei punti  $g_i$  dati dalla (8) e la sua incertezza è lo scarto tipo dei valori medi  $\sigma[m[g]]$ . Infine la retta rossa è quella che rappresenta la media pesata dei  $g_i$ , sempre dati dalla (8), effettuata con peso  $w_i = 1/\sigma[g_i]^2$ , mentre la sua incertezza

## Dipendenza di $g$ da $l$

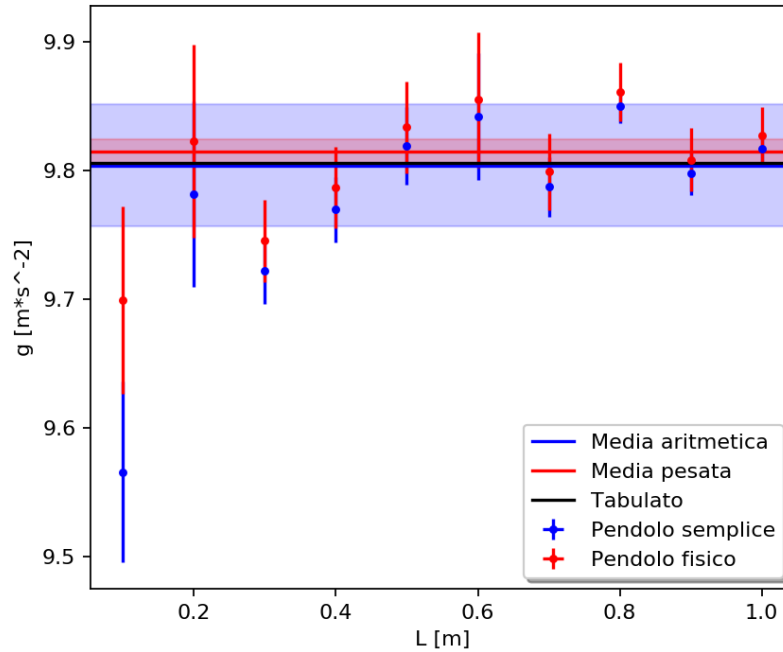


Figure 6: In blu i valori di  $g$  con errorbar ricavati a partire da lunghezza e periodo attraverso la legge per pendolo semplice. In rosso quelli ricavati con quella per pendolo fisico.

è data da  $\sigma[g_w] = 1/\sqrt{\sum w_i}$ .

Nella tabella seguente sono riportati i valori di media pesata e aritmetica ottenuto con le due formule di  $g$ :

Stima di $g$	Valore
Tabulata	$9.8061 \text{ m s}^{-2}$
Media aritmetica pendolo semplice	$9.78 \pm 0.08 \text{ m s}^{-2}$
Media pesata pendolo semplice	$9.809 \pm 0.007 \text{ m s}^{-2}$
Media aritmetica pendolo fisico	$9.80 \pm 0.05 \text{ m s}^{-2}$
Media pesata pendolo fisico	$9.815 \pm 0.010 \text{ m s}^{-2}$

Notiamo da questi dati che tutte le medie sarebbero compatibili con il valore di  $g$  tabulato e anche che l'incertezza sulle medie aritmetiche sono maggiori anche di più di un fattore 10 rispetto a quelle pesate, le quali in questo caso sono migliori anche poiché tengono conto del fatto che l'incertezza su piccole lunghezze del filo è maggiore rispetto a quando il pendolo è più lungo. Per avere un'effettiva conferma che i valori di  $g_i$  derivanti dalle osservazioni siano compatibili con una legge costante, in questo caso definita dalle medie pesate, possiamo effettuare un test del chi quadrato. Avendo 9 gradi di libertà possiamo scegliere una probabilità del falso allarme dell'1% per un test one-sided, in questo modo l'estremo superiore del nostro intervallo di accettazione è 21.7 sia per il  $\chi_{oss}^2$  calcolato a partire dall'equazione di pendolo semplice che da quella per pendolo fisico con approssimazione a piccoli angoli minore. Il valore del chi quadrato osservato a partire dai  $g_i$  dati da  $g_i = (2\pi/\mathcal{T}_i)^2 \ell_i$  risulta  $\chi_{oss}^2 = 38.0$  che è fuori dalla nostra soglia di accettazione, perciò dobbiamo escludere che i nostri valori  $g_i$  ottenuti con approssimazione a pendolo semplice seguano una legge costante. In effetti questo risultato è in accordo con l'osservazione fatta precedentemente di non compatibilità del valore di  $b$  con  $1/2$ . Per contro il  $\chi_{oss}^2$  dato dalla (8) risulta 13.6, che invece possiamo accettare. Vediamo allora che nel nostro caso abbiamo degli errori casuali e di risoluzione talmente esigui che non ci basta più una semplificazione del modello fisico per descrivere le osservazioni, ma dobbiamo utilizzare un modello meno approssimato. Coerentemente con questo risultato, se volessimo calcolarci il valore di  $g$  con incertezza, a partire da quello di  $a$  calcolato nell'analisi precedente, attraverso la formula  $g = (2\pi/a)^2$  troveremmo un valore  $g_a = 9.831 \pm 0.008 \text{ ms}^{-2}$  che non è compatibile con quello tabulato. Questo avviene perché  $a$  era stata trovata supponendo che ci fosse una costante di proporzionalità tra  $\mathcal{T}$  e  $\ell^b$ , che nell'equazione per pendolo semplice è appunto  $2\pi/\sqrt{g}$ , ma ora che sappiamo che i nostri dati non sono ben spiegati da questa relazione, è normale che il valore di  $g$  dato da essa non sia compatibile con quello tabulato. In questa esperienza sono emerse le problematiche di utilizzare strumenti di misura con risoluzione molto bassa e molto accurati e che

limitano quindi gli errori casuali. Infatti se da un lato questi possono migliorare molto le misure, dall'altro sono più soggetti a errori sistematici, in quanto più si è precisi nelle misure più entrano in gioco molti fattori in altre condizioni considerati trascurabili, si veda come in questa esperienza è stato necessario utilizzare l'equazione del pendolo fisico invece di quella per semplice con approssimazione per piccoli angoli.